關於“數”

§1 整數

一、一切整數的集合以 Z（或 I）表示，即 Z = { …，-3，-2，-1，0，1，2，3，…}。

二、整數的四則運算性質：a，b，$c \in Z$ 則

1、封閉性：$a+b \in Z$ ，$a-b \in Z$ ，$a \times b \in Z$ 。（但 $a \div b \in Z$ 則未必會成立。）
2、交換律：$a+b=b+a$ ，$a \times b = b \times a$ 。（但 $a-b=b-a$ 和 $a \div b = b \div a$ 未必會成立。）
3、結合律：$(a+b)+c=a+(b+c)$ 且 $a \times (b \times c) = (a \times b) \times c$ 成立
4、分配律：$a \times (b+c) = a \times b + a \times c$
5、消去律：若 $a+b=a+c$ ，則 $b=c$
6、單位元素 1：$a \times 1 = a$ ，$a+0=a$ ，$a \times 0 = 0$

三、次序性質：

1、$a-b>0$ 則可知 $a>b$ 。
2、三一律：$a>b$ ，$a=b$ ，$a<b$ 恰一式成立。
3、加法律：$a>b$ 且 $c>0$ ，所以 $a+c>b+c$ 。
4、乘法律：（1）$a>b$ 且 $c>0$ ，所以 $ac>bc$ 。
（2）$a>b$ 且 $c<0$ ，所以 $ac<bc$ 。

四、若 a，$b \in Z$ ，且 $a \div b \in Z$ 成立，則稱 a 為 b 的倍數，b 為 a 的因數，以 $b|a$ 表示之。
【註】最大公因數：(a,b) ，最小公倍數：$[a,b]$

五、a，b，c，m，$n \in Z$

1. $a|b$ 且 $b|c$ ，則 $a|c$
2. $a|b$ 且 $a|c$ ，則 $a|b \pm c$
3. $a|b$ 且 $a|c$ ，則 $a|mb \pm nc$

六、質數的判定：$a \in N$ 且 $a>1$，若所有不大於 $\sqrt{a}$ 之質數都不是 a 的因數，則 a 必定是質數。

七、質數有無限多個。

八、輾轉相除法原理：$a,b,q,r\in Z$ 且 $a=bq+r$（$0\le r\le |b|$，$b\ne 0$）則 $(a,b)=(b,r)$

九、$a,b\in N$，$(a,b)=d$ 且 $a=dh$，$b=dk$，則 $(h,k)=1$，$[a,b]=hkd$，且 $[a,b]\cdot(a,b)=ab$

§2 有理數與實數

一、凡是能寫成 $\dfrac{a}{b}$（$a,b\in Z$，且 $b\ne 0$）的形式的數，皆爲有理數（以 Q 表示）

二、任意兩個不相等之有理數之間，一定會至少存在一個有理數。稱這個性質爲有理數的稠密性。

三、無理數與實數也有稠密性。

四、1. $a,b\in Q$，$\sqrt{c}\in R$ 但 $\sqrt{c}\notin Q$，$a+b\sqrt{c}=0$，則 $a=b=0$
2. $a,b,c,d\in Q$，$\sqrt{e}\in R$ 但 $\sqrt{e}\notin Q$，$a+b\sqrt{e}=c+d\sqrt{e}$，則 $a=c$ 且 $b=d$

五、有理數係數方程式，有一個根爲 $a+b\sqrt{c}$，則必有一個根 $a-b\sqrt{c}$
（$a,b\in Q$，$\sqrt{c}\in R$ 但 $\sqrt{c}\notin Q$）

六、$x,y,z\in R$（R 爲實數的集合）
1. $x+y$，$x-y$，xy，$x\div y$（$y\ne 0$）均爲實數。
2. 交換律：$x+y=y+x$ 且 $x\cdot y=y\cdot x$
3. 結合律：$(x+y)+z=x+(y+z)$ 且 $(xy)z=x(yz)$
4. 分配律：$(x+y)\cdot z=xz+yz$
5. 消去率：$x+z=y+z$，則 $x=y$
$x\cdot z=y\cdot z$ 且 $z\ne 0$，則 $x=y$
6. 單位元素：$x+0=x$，$x\cdot 0=0$，$x\cdot 1=x$

七、$x,y,z\in R$
1. 三一律：$x>y$，$x=y$，$x<y$ 恰有一個成立。
2. 遞移律：$x<y$ 且 $y<z\Rightarrow x<z$
3. $x<y\Leftrightarrow x+z<y+z$
4. $z>0$，則 $x>y\Leftrightarrow xz>yz$
5. $z<0$，則 $x>y\Leftrightarrow xz<yz$

八、$a\ge 0$ 則 $|a|=a$
$a<0$ 則 $|a|=-a$

九、$a,b\in R$ 則 $|a|+|b|\ge |a+b|$

$$|a|+|b|=|a+b| \quad \Leftrightarrow \quad ab \ge 0$$
$$|a|+|b|>|a+b| \quad \Leftrightarrow \quad ab<0$$

十、阿基米得性質：$a,b\in R$，$a\neq 0$，則必定存在一個$n\in N$使得$n|a|>b$。

mengwen的筆記

§3 複數及其運算

一、1. $a,b\in R$，則形如$a+bi$的數稱爲複數（複數的集合以 C 表示之）

2. 一個複數 Z，寫成$Z=a+bi$（$a,b\in R$）的形式，稱爲標準式，稱 a 爲 Z 的實部，b 爲 Z 的虛部。

3. $Z=a+bi$（$a,b\in R$），當$a=0$，$b\neq 0$時，稱爲純虛數。

4. 若$Z=a+bi\in R$（$a,b\in R$），則$b=0$。

二、$a,b,c,d\in R$，則

1. $a+bi=c+di$，則$a=c$且$b=d$
   若$a+bi=0$，則$a=b=0$
2. $(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i$
3. $(a+bi)-(c+di)=(a-c)+(b-d)i$
4. $(a+bi)(c+di)=(ac-bd)+(bc+ad)i$
5. $\dfrac{1}{a+bi}=\dfrac{a-bi}{a^2+b^2}$（$a^2+b^2\neq 0$）

三、$Z=a+bi$（$a,b\in R$）

$\overline{Z}=a-bi$，稱爲 Z 的共軛複數。

四、$Z_1;Z_2\in C$，$n\in Z$

1. $\overline{Z_1+Z_2}=\overline{Z_1}+\overline{Z_2}$
2. $\overline{Z_1-Z_2}=\overline{Z_1}-\overline{Z_2}$
3. $\overline{Z_1Z_2}=\overline{Z_1}\cdot\overline{Z_2}$
4. $\overline{\left(\dfrac{Z_1}{Z_2}\right)}=\dfrac{\overline{Z_1}}{\overline{Z_2}}$（$Z_2\neq 0$）
5. $\overline{Z^n}=(\overline{Z})^n$
6. $Z=\overline{Z}$ 則 $Z\in R$
7. $\overline{Z}=-Z$ 則 Z 爲純虛數或 0

五、共軛根數定理：

$f(x)\in R[x]$，若$f(x)=0$有一虛根$a+bi$（$a,b\in R$，$b\neq 0$），則$f(x)=0$必定有一虛根$a-bi$。

六、1. $a,b\in R$，$a^2+b^2=0\Leftrightarrow a=0$且$b=0$　成立

2. $a,b\in C$，$a^2+b^2=0 \Leftrightarrow a=0$ 且 $b=0$　未必成立
3. $a,b\in C$，$ab=0 \Leftrightarrow a=0$ 或 $b=0$

mengwen的筆記

【Note】：整　數：Z
自然數：N
實　數：R
有理數：Q
複　數：C

mengwen的筆記

§4 一元二次方程式

一、一元二次方程式定義：含一個未知數 x，且 x 的最高次數爲 2，稱爲一元二次方程式。
例如：$ax^2+bx+c=0$，其中 a、b 和 c 爲常數。

二、$a,b,c\in R$，$a\neq 0$，解一元二次方程式 $ax^2+bx+c=0$

$$ax^2+bx+c=0 \;\to\; x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$$
$$\to [x^2+\frac{b}{a}x+(\frac{b}{2a})^2]+\frac{c}{a}-(\frac{b}{2a})^2=0$$
$$\to (x+\frac{b}{2a})^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$$
$$\to x+\frac{b}{2a}=\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$
$$\to x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$ ....得解#

因此 $ax^2+bx+c=a[x-\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}][x-\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}]$

三、分析 $f(x)=ax^2+bx+c=0$ 方程式：
假設 $D=b^2-4ac$（稱 D 爲根的判別式）

1、$D=b^2-4ac>0$，則此方程式有兩個解，兩個相異實根，$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

2、$D=b^2-4ac=0$，則此方程式有唯一解，兩個相等實根，$x=\frac{-b}{2a}$

3、$D=b^2-4ac<0$，則此方程式有兩個共軛虛根，$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

四、$ax^2+bx+c=0$（$a\neq 0$），有兩個根，α、β。則：

1. $\alpha+\beta=-\dfrac{b}{a}$
2. $\alpha\beta=\dfrac{c}{a}$
3. $a\alpha^2+b\alpha+c=0$
4. $a\beta^2+b\beta+c=0$

五、 $f(x)=ax^2+bx+c=0$，有兩個根，α 、 β ， $D=b^2-4ac$ （ $a,b,c\in R$ ， $a\neq 0$ ）。則：

1. $f(x)$ 有兩個正根，則 $D=b^2-4ac\geq 0$ ， $\alpha+\beta=-\dfrac{b}{a}>0$ ， $\alpha\beta=\dfrac{c}{a}>0$
2. $f(x)$ 有兩個負根，則 $D=b^2-4ac\geq 0$ ， $\alpha+\beta=-\dfrac{b}{a}<0$ ， $\alpha\beta=\dfrac{c}{a}>0$
3. $f(x)$ 有一個正根，一個負根，則 $\alpha\beta=\dfrac{c}{a}<0$