數列與級數

@1 數列與級數：

數列：$<a_n> = <a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...>$

有限級數：$a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$

無限級數：$a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n + ... = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$

@2 等差數列與等差級數（A.P.）：

一數列爲 a_1 、a_2 、a_3 、a_4 、........ a_n

其中 $a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = ... = a_n - a_{n-1} = d$

就稱此數列爲等差數列，而相鄰兩項的差 d 稱爲“公差”。

第 n 項的值：一等差數列，首項爲 a ，公差爲 d ，第 n 項爲 a_n

則 $a_n = a + (n-1)d$

$a_n = a_k + (n-k)d$

已知 a 、b 、c 爲等差數列，其中 $b = \dfrac{a+c}{2}$ ，則稱 b 爲等差中項

等差級數的和：$S_n = \dfrac{(a_1 + a_n)n}{2} = \dfrac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d]$

$$\sum_{n=1}^{n} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n$$
$$= a + [a+d] + [a+2d] + [a+3d] + ... + [a+(n-1)d]$$
$$= an + [1 + d + 2d + 3d + ...(n-1)d]$$

$$= an + \frac{1+(n-1)d}{2} \times n = \frac{2a+d}{2} \times n$$

@3 等比數列與等比級數（G.P.）：

一數列為 a_1、a_2、a_3、a_4、........ a_n

其中 $\frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = \frac{a_4}{a_3} = ... = \frac{a_n}{a_{n-1}} = r$

就稱此數列為等比數列，而相鄰兩項的商數 r 就稱為"公比"。

第 n 項的值：一等比數列，首項為 a，公比為 r，第 n 項為 a_n

則 $a_n = ar^{n-1}$

$a_n = a_k r^{n-k}$

等比級數的和：$S_n = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r}$（但 $r \neq 1$）

$$\sum_{n=1}^{n} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n$$
$$= a + ar + ar^2 + ar^3 + ... + ar^{n-1}$$
$$= a(1 + r + r^2 + r^3 + ... + r^{n-1})$$
$$= a\frac{1-r^n}{1-r}$$

$1 + r + r^2 + r^3 + ... + r^{n-1} = \frac{r^n - 1}{r-1}$

證明：假設 $A = 1 + r + r^2 + r^3 + ... + r^{n-1}$

$rA = r + r^2 + r^3 + ... + r^n$

兩式相減 $A - rA = 1 - r^n$

$\therefore A = \frac{1-r^n}{1-r}$ ……得証#

@4 調和數列與調和級數（H.P.）：

一數列為 $\frac{1}{a}$、$\frac{1}{a+d}$、$\frac{1}{a+2d}$、…、$\frac{1}{a+(n-1)d}$、…其倒數為等差數列，稱為調和數列。

已知 a、b、c 為調和數列，可知 $\frac{1}{a}$、$\frac{1}{b}$、$\frac{1}{c}$ 為等差數列，其中 $b = \frac{2ac}{a+c}$，為調和中項。

@5 有限級數和 $S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k$ ：

設 $<a_n><b_n>$ 爲任一兩個數列，c 爲一常數。則

1. $\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)=\sum_{k=1}^{n}a_k+\sum_{k=1}^{n}b_k$

2. $\sum_{k=1}^{n}(a_k-b_k)=\sum_{k=1}^{n}a_k-\sum_{k=1}^{n}b_k$

3. $\sum_{k=1}^{n}c\cdot a_k=c\cdot\sum_{k=1}^{n}a_k$

4. $\sum_{k=1}^{n}c=c+c+c+......+c=n\cdot c$

5. $\sum_{k=1}^{n}k=1+2+3+......+n=\dfrac{n\cdot(n+1)}{2}$

證明：$(k+1)^2=k^2+2k+1$

$2^2=1^2+2\times1+1$

$3^2=2^2+2\times2+1$

$4^2=3^2+2\times3+1$

………

$n^2=(n-1)^2+2(n-1)+1$

$(n+1)^2=n^2+2n+1$

以上等式相加

$\rightarrow(n+1)^2=1^2+2(1+2+3+...+n)+(1+1+1+...+1)$

$2(1+2+3+...+n)=(n+1)^2-1^2-n=n(n+1)$

$\sum_{k=1}^{n}k=\dfrac{n(n+1)}{2}$ ……得証#

6. $\sum_{k=1}^{n}k^2=1^2+2^2+3^2+......+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{2}$

證明：已知 $(k+1)^3=k^3+3k^2+3k+1$

$2^3=1^3+3\times1^2+3\times1+1$

$3^3=2^3+3\times2^2+3\times2+1$

$4^3=3^3+3\times3^2+3\times3+1$

………

$n^3=(n-1)^3+3\times(n-1)^2+3\times(n-1)+1$

$(n+1)^3=n^3+3\times n^2+3\times n+1$

以上等式相加

$$\rightarrow (n+1)^3 = 1^3 + 3\times(1^2+2^2+3^2+...+n^2)$$
$$+3(1+2+3+...+n)+(1+1+1+...+1)$$

$$3(1^2+2^2+3^2+...+n^2) = (n+1)^3 - 1 - 3\times\frac{n(n+1)}{2} - n$$
$$= (n+1)^3 - 3\times\frac{n(n+1)}{2} - (n+1)$$
$$= \frac{n+1}{2}[2(n+1)^2 - 3n - 2] = \frac{n+1}{2}(2n^2+n)$$

$\therefore \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{2}$ ……得証#

7. $\sum_{k=1}^{n} k^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

證明：由 $(k+1)^4 = k^4 + 4k^3 + 6k^2 + 4k + 1$ 可得証。

@6 算數平均與幾何平均：

設 a、b 均非負數，則 $\frac{a+b}{2} \ge \sqrt{ab}$，當 $a=b$ 時，等號成立。

證明：$(a-b)^2 \ge 0$

$a^2 - 2ab + b^2 \ge 0$

$(a+b)^2 - 4ab \ge 0$

$(a+b)^2 \ge 4ab$

$\frac{(a+b)^2}{4} \ge ab$

$\because a$、b 均非負數

$\therefore \frac{a+b}{2} \ge \sqrt{ab}$ ……得証#

推廣：設 a_1、a_2、a_3、a_4、…….. a_n 均非負數，則

$$\frac{a_1+a_2+a_3+...+a_n}{n} \ge \sqrt[n]{a_1\cdot a_2\cdot a_3\cdot......\cdot a_n}$$

當 $a_1 = a_2 = a_3 = ... = a_n$ 時，等號成立。

@7 無窮等比級數：

無窮等比級數$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = a + ar + ar^2 + ... + ar^{n-1} + ...$（$ar \neq 0$）

首 n 項和為$S_n = \dfrac{a(1-r^n)}{1-r} = \dfrac{a}{1-r} - \dfrac{ar^n}{1-r}$

1.當 $|r|<1$時，$\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \dfrac{a}{1-r}$，此級數收斂。

2.當 $|r|\geq 1$時，此級數發散。

兩無窮級數$\langle a_n \rangle \langle b_n \rangle$均為收斂，c 為一常數。則

1. $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n+b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n + \lim\limits_{n\to\infty} b_n$

2. $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n-b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n - \lim\limits_{n\to\infty} b_n$

3. $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = (\lim\limits_{n\to\infty} a_n)\cdot(\lim\limits_{n\to\infty} b_n)$

4. $\lim\limits_{n\to\infty}(\dfrac{a_n}{b_n}) = \dfrac{(\lim\limits_{n\to\infty} a_n)}{(\lim\limits_{n\to\infty} b_n)}$（$b_n \neq 0$）

5. $\lim\limits_{n\to\infty}(c\cdot a_n) = c\cdot\lim\limits_{n\to\infty} a_n$，且$\lim\limits_{n\to\infty} c = c$

6. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1}$

7. 若$\forall_n \in N$，恆有$a_n > b_n$，則$\lim\limits_{n\to\infty} a_n \geq \lim\limits_{n\to\infty} b_n$

將循環小數化為分數：

1.$0.\overline{abc} = \dfrac{abc}{999}$

證明：$x = 0.\overline{abc} = 0.abcabcabcabc......$（1 式）

$1000x = abc.\overline{abc} = abc.abcabcabc......$（2 式）

兩式相減，得

$999x = abc$

$$x=0.\overline{abc}=\frac{abc}{999}\text{……得証\#}$$

$$2.\ a.\overline{bcde}=a+\frac{bcde}{9999}$$

$$3.\ a.bc\overline{def}=a+\frac{bcdef-bc}{99900}$$

mengwen的筆記

@8 例題：

1.求$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+......+\frac{1}{n\cdot(n+1)}=$？

ANS：$\frac{1}{n\cdot(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$

$$\sum_{n=1}^{n}\frac{1}{n\cdot(n+1)}=\sum_{n=1}^{n}(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1})$$

$$=\sum_{n=1}^{n}\frac{1}{n}-\sum_{n=1}^{n}\frac{1}{n+1}$$

$$=(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n})-(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+...+\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1})$$

$$=\frac{1}{1}-\frac{1}{n+1}$$

$$=\frac{n}{n+1}\text{……\#}$$

2.一等差數列，首項為 100，公差為-3，首 n 項和為S_n，當 n=？時，S_n的最大值=？

ANS：$S_n=\frac{2\cdot 100+(n-1)(-3)}{2}\times n$有 max

即$a_n=100+(n-1)(-3)\geq 0$

$\rightarrow n\leq 34.333..$

$\therefore n=34$，$S_n=1717$……#

3.假設兩個等差數列首 n 項的和為$(7n+1):(4n+27)$，則此二數列的第四項的比為何？

ANS：$10:11$

4.數列$\langle a_n\rangle=\langle\frac{1}{1},\frac{2}{1},\frac{1}{2},\frac{3}{1},\frac{2}{2},\frac{1}{3},\frac{4}{1},\frac{3}{2},\frac{2}{3},\frac{1}{4},......\rangle$的第 100 項為何？

ANS：$\frac{6}{9}$

5.求$1+(1+2)+(1+2+3)+......+(1+2+3+...+n)$的和？

ANS：$\frac{1}{6}n(n+1)(n+2)$

6.求$1\cdot2+(1\cdot2+2\cdot3)+(1\cdot2+2\cdot3+3\cdot4)+......[1\cdot2+2\cdot3+3\cdot4+...+n\cdot(n+1)]$爲何？

ANS：$\frac{1}{12}n(n+1)(n+2)(n+3)$

7.求$\frac{1}{1}+\frac{1}{1+2}+\frac{1}{1+2+3}+......+\frac{1}{1+2+3+...+n}$的和？

ANS：$\frac{2n}{n+1}$

8.求 $1\cdot n+2\cdot(n-1)+3\cdot(n-2)+...+n\cdot1$ 的和？

ANS：$\frac{1}{6}n(n+1)(n+2)$

9.一等差數列，其首 n 項和爲$S_n=3n^2+4n$則$a_n=$？

ANS：$a_n=S_n-S_{n-1}=(3n^2+4n)-[3(n-1)^2+4(n-1)]=6n+1$

10.假設任意兩正數的等差中項爲 A，等比中項爲 G($G>0$)，調和中項爲 H，試證明 1.$G^2=AH$
2.$A\geq G\geq H$
證明：設 a、b 兩數

11.求無窮級數$\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{n\cdot(n+2)})$的和？

ANS：$\frac{3}{4}$

12.一球由 30 公尺高的地方落下，每次著地後，彈跳的高度為原來高度的$\frac{2}{3}$，則此球靜止前，經過的距離為多少公尺？

ANS：150 公尺