指數與對數

◎1 指數
◎2 對數

mengwen的筆記

◎1 指數

一、整數指數運算

定義：對於每一個實數 a，以記號 $a^n = a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot \ldots\ldots \cdot a$（$n$ 個 a 相乘），叫做 “a 的 n 次方” ，其中 a 為底數，n 為指數。

指數律：
1. $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$
2. $(a^m)^n = a^{mn}$
3. $a^n \cdot b^n = (ab)^n$
4. $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$（$a \neq 0$，$m > n$）
5. $(\dfrac{a}{b})^n = \dfrac{a^n}{b^n}$（$b \neq 0$）

二、零指數與負整數指數

1. 當 $a \neq 0$ 時，其中 $n \in N$，定義 $a^0 = 1$ 且 $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$ 成立。
2. a、b 為實數且都大於零。m 為一正整數。
   (1) 若 $a > b$ 則 $a^m > b^m$
   (2) 若 $a < b$ 則 $a^{\frac{1}{m}} > b^{\frac{1}{m}}$
3. 若 $a \in R$，$a > 1$，$m, n \in Z$，$m > n$ 則 $a^m > a^n$
4. 若 $a \in R$，$1 > a > 0$，$m, n \in Z$，$m > n$ 則 $a^m < a^n$

三、分數指數運算

1. 若 $a > 0$，$n \in N$，定義 $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$
2. 假設 $r = \dfrac{m}{n}$，其中 $n \in N$，$m \in Z$，定義 $a^r = a^{\frac{m}{n}} = (\sqrt[n]{a})^m$
3. 對於所有有理數 p、q，則 $a^p \cdot a^q = a^{p+q}$

4. 對於所有有理數 p、q，則 $(a^p)^q = a^{pq}$
5. 對於所有有理數 r，則 $a^r \cdot b^r = (ab)^r$

四、實數指數運算

1. 指數律：假設 $a>0$ ，$r,s\in R$ ，則
   (1) $a^r \cdot a^s = a^{r+s}$
   (2) $(a^r)^s = a^{rs}$
   (3) $a^r \cdot b^r = (ab)^r$
2. 設 $a\in R$ ，
   (1) $a>1$ ，$m>n$ ，則 $a^m > a^n$
   (2) $1>a>0$ ，$m>n$ ，則 $a^m < a^n$

mengwen的筆記

◎2 對數

一、$a>0$ 且 $a\neq 1$，且 $b>0$

則 $a^x = b \rightarrow \log_a b = x$

二、運算公式：以下 $a>0$ ，$a\neq 1$ 且真數均為正

1. $\log_a a = 1$ 且 $\log_a 1 = 0$

2. $\log_a a^x = x$ 且 $a^{\log_a x} = x$

證明：假設 $\log_a a^x = m$

則 $a^x = a^m$
所以 $x = m$ ……得証#

3. $\log_a rs = \log_a r + \log_a s$ 且 $\log_a \frac{r}{s} = \log_a r - \log_a s$

證明：假設 $\log_a r = m$
$\log_a s = n$
則 $a^m = r$
$a^n = s$

$a^{m+n} = rs \Rightarrow \log_a rs = m+n = \log_a r + \log_a s$

$$a^{m-n}=\frac{r}{s}\ \Rightarrow\ \log_a\frac{r}{s}=m-n=\log_a r-\log_a s$$ 得証#

4. $\log_a r^n=n\log_a r$

5. $\log_a b=\dfrac{\log_x b}{\log_x a}$ 或 $\log_a b=\dfrac{1}{\log_b a}$

6. $\log_a b=\log_{a^n} b^n$

三、$r>0$ 且 $s>0$

1. $a>1$時，$r>s\ \rightarrow\ \log_a r>\log_a s$
2. $0<a<1$時，$r>s\ \rightarrow\ \log_a r<\log_a s$

四、$a>0$且$a\neq1$，且$x>0$

1. $\log_a x>0\ \rightarrow\ (a-1)(x-1)>0\ \rightarrow$ （$a>1$且$x>0$）或（$0<a<1$且$0<x<1$）
2. $\log_a x=0\ \rightarrow\ x=1$
3. $\log_a x<0\ \rightarrow\ (a-1)(x-1)<0\ \rightarrow$ （$a>1$且$0<x<1$）或（$0<a<1$或$x>1$）

五、對數函數：$a>0$，$a\neq1$，$x>0$，則 $f(x)=\log_a x$ 稱爲對數函數

六、$f(x)=\log_a x$

(1) 若$a>1$，則 $f(x)$ 爲增函數
(2) 若$0<a<1$，則 $f(x)$ 爲減函數
(3) $f(xy)=f(x)f(y)$

七、$\log x=n+p$（$n\in Z$，$0\leq p<1$）則稱 n 爲$\log x$的首數，p 爲$\log x$的尾數。

mengwen的筆記