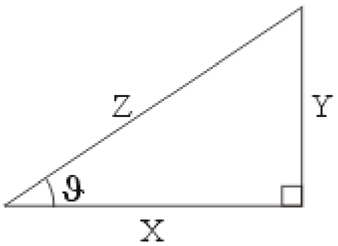
關於三角函數

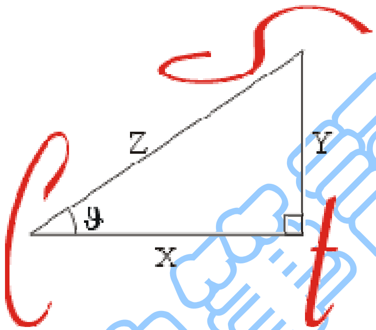
三角函數（Trigonometric function）包含以下六個：

正弦函數：sine 符號：sin	餘弦函數：cosine 符號：cos
正切函數：tangent 符號：tan	餘切函數：cotangent 符號：cot
正割函數：secant 符號：sec	餘割函數：cosecant 符號：csc

銳角三角函數：

一直角三角形，鄰邊為 X，對邊為 Y，斜邊為 Z，斜邊和鄰邊夾角為 θ，如圖，則：





$$\sin\theta = \frac{對邊}{斜邊} = \frac{Y}{Z}$$

$$\cos\theta = \frac{鄰邊}{斜邊} = \frac{X}{Z}$$

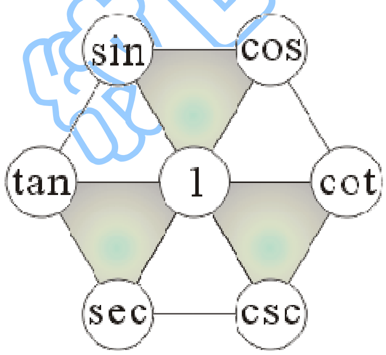
$$\tan\theta = \frac{對邊}{鄰邊} = \frac{Y}{X} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

$$\cot\theta = \frac{鄰邊}{對邊} = \frac{1}{\tan\theta} = \frac{\cos\theta}{\sin\theta} = \frac{X}{Y}$$

$$\sec\theta = \frac{斜邊}{鄰邊} = \frac{1}{\cos\theta} = \frac{Z}{X}$$

$$\csc\theta = \frac{斜邊}{對邊} = \frac{1}{\sin\theta} = \frac{Z}{Y}$$

基本恆等式：



1、倒數關係：$\sin\theta = \dfrac{1}{\csc\theta}$，$\cos\theta = \dfrac{1}{\sec\theta}$，$\tan\theta = \dfrac{1}{\cot\theta}$

$\cot\theta = \dfrac{1}{\tan\theta}$，$\sec\theta = \dfrac{1}{\cos\theta}$，$\csc\theta = \dfrac{1}{\sin\theta}$

2、平方關係：$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

$\tan^2\theta + 1 = \sec^2\theta$

$1 + \cot^2\theta = \csc^2\theta$

證明：直角三角函數中，$X^2 + Y^2 = Z^2$

$$\frac{X^2}{Z^2}+\frac{Y^2}{Z^2}=1$$

$$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$$

得証，以此類推

3、商數關係：$\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\tan\theta$，$\frac{\tan\theta}{\sin\theta}=\sec\theta$，$\frac{\sec\theta}{\tan\theta}=\csc\theta$

$\frac{\csc\theta}{\sec\theta}=\cot\theta$，$\frac{\cot\theta}{\csc\theta}=\cos\theta$，$\frac{\cos\theta}{\cot\theta}=\sin\theta$

證明：$$\frac{\tan\theta}{\sin\theta}=\frac{(\frac{\sin\theta}{\cos\theta})}{\sin\theta}=\frac{1}{\cos\theta}=\sec\theta$$

得証，以此類推

4、餘角關係：$\sin(90^0-\theta)=\cos\theta$，$\cos(90^0-\theta)=\sin\theta$

$\tan(90^0-\theta)=\cot\theta$，$\cot(90^0-\theta)=\tan\theta$

$\sec(90^0-\theta)=\csc\theta$，$\csc(90^0-\theta)=\sec\theta$

【Note】一般習慣 $(\sin\theta)^2=\sin^2\theta$

$(\sin\theta)^3=\sin^3\theta$......

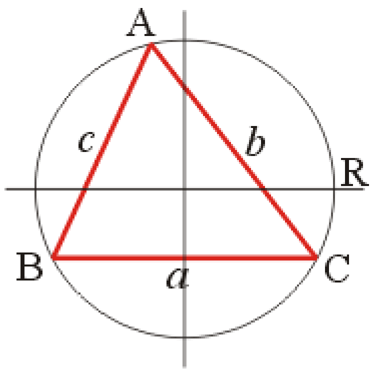
但... $(\sin\theta)^{-1}=\frac{1}{\sin\theta}\neq\sin^{-1}\theta$......※

【補充】反函數

$\sin\theta=a \quad\Rightarrow\quad \theta=\sin^{-1}a$

正弦定理與餘弦定理

在△ABC 中，a、b、c 分別是∠A、∠B、∠C 的對邊，R 為△ABC 的外接圓半徑，△為三角形的面積，$S=\frac{1}{2}(a+b+c)$，如圖，則：



一、兩邊夾角的三角形面積

$$\Delta=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}ca\sin B=\frac{1}{2}ab\sin C$$

$=\sqrt{S(S-a)(S-b)(S-c)}$

PS：$\Delta=\sqrt{S(S-a)(S-b)(S-c)}$ 稱海龍（Heron）公式。

二、正弦定理：$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=2R$

（1）$a:b:c=\sin A:\sin B:\sin C$

（2）$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=2R=\dfrac{abc}{2\Delta}$

（3）$R=\dfrac{abc}{4\Delta}$

三、餘弦定理：$\begin{cases} a^2=b^2+c^2-2bc\cos A \\ b^2=c^2+a^2-2ca\cos B \\ c^2=a^2+b^2-2ab\cos C \end{cases}$ 即 $\begin{cases} \cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc} \\ \cos B=\dfrac{c^2+a^2-b^2}{2ca} \\ \cos C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab} \end{cases}$

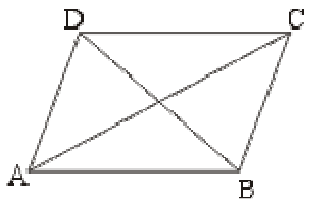
四、投影定理：$a=b\cos C+c\cos B$

$b=a\cos C+c\cos A$

$c=a\cos B+b\cos A$

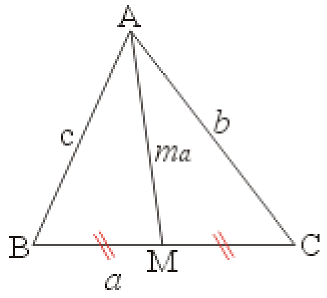
五、平行四邊形定理：平行四邊形各邊的平方和，等於兩對角線的平方和

$\overline{AB}^2+\overline{BC}^2+\overline{CD}^2+\overline{DA}^2=\overline{AC}^2+\overline{BD}^2$



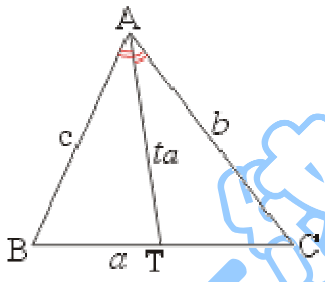
六、三角形中線定理：△ABC 中，假設 $\overline{AM}$ 為 $\overline{BC}$ 邊上的中線（$\overline{BM}=\overline{CM}$），則

$\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=2(\overline{AM}^2+\overline{BM}^2)$，即 $m_a=\dfrac{1}{2}\sqrt{2(b^2+c^2)-a^2}$



七、△ABC 中，$\angle BAT=\angle CAT=\dfrac{A}{2}$

分角線長：$t_a=\dfrac{2bc}{b+c}\cos\dfrac{A}{2}$



任意角的三角函數：假設某一任意角度為θ，則

$$\sin\theta=\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$$

$$\cos\theta=\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$$

$$\tan\theta=\frac{-i(e^{i\theta}-e^{-i\theta})}{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}$$

證明：$e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$ …..（Why？高等數學再去證明吧！先用再說！）

$e^{-i\theta}=\cos\theta-i\sin\theta$

$e^{i\theta}-e^{-i\theta}=2i\sin\theta$

$\therefore\ \sin\theta=\dfrac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$ ……以此類推。

三角函數間的關係：

平方和：

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$

證明 1：勾股定理：對於一直角三角形，已知 $X^2+Y^2=Z^2$

$$\therefore \sin^2\theta+\cos^2\theta=(\frac{X}{Z})^2+(\frac{Y}{Z})^2$$

$$=\frac{X^2+Y^2}{Z^2}=\frac{Z^2}{Z^2}=1\text{......得証\#}$$

證明 2：已知 $\sin\theta=\dfrac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$ ， $\cos\theta=\dfrac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$

$$\sin^2\theta+\cos^2\theta=(\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i})^2+(\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2})^2$$

$$=(\frac{e^{i2\varpi}-2\times1+e^{-i2\theta}}{-4})+(\frac{e^{i2\theta}+2\times1+e^{-i2\theta}}{4})$$

$$=\frac{4}{4}=1\text{......得証\#}$$

$\tan^2\theta+1=\sec^2\theta$

證明 1：勾股定理：對於一直角三角形，已知 $X^2+Y^2=Z^2$

$$\therefore \sec^2\theta-\tan^2\theta=(\frac{Z}{X})^2-(\frac{Y}{X})^2=\frac{Z^2-Y^2}{X^2}=\frac{X^2}{X^2}=1$$

$$\therefore \tan^2\theta+1=\sec^2\theta\text{......得証\#}$$

證明 2： $\sec^2\theta-\tan^2\theta=(\dfrac{1}{\cos\theta})^2-(\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta})^2$

$$=(\frac{1-\sin^2\theta}{\cos^2\theta})=\frac{\cos^2\theta}{\cos^2\theta}=1\text{......得証\#}$$

$1+\cot^2\theta=\csc^2\theta$

證明：

證明 1：勾股定理：對於一直角三角形，已知 $X^2+Y^2=Z^2$

$$\therefore \csc^2\theta-\cot^2\theta=(\frac{Z}{Y})^2-(\frac{X}{Y})^2=\frac{Z^2-X^2}{Y^2}=\frac{Y^2}{Y^2}=1$$

$$\therefore 1+\cot^2\theta=\csc^2\theta\text{......得証\#}$$

證明 2： $\csc^2\theta-\cot^2\theta=(\frac{1}{\sin\theta})^2-(\frac{\cos\theta}{\sin\theta})^2$

$=(\frac{1-\cos^2\theta}{\sin^2\theta})=\frac{\sin^2\theta}{\sin^2\theta}=1$ ……得証#

mengwen 的筆記

兩角和、兩角差：

$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta$

證明： $\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta=(\frac{e^{i\alpha}-e^{-i\alpha}}{2i})(\frac{e^{i\beta}+e^{-i\beta}}{2})\pm(\frac{e^{i\alpha}+e^{-i\alpha}}{2})(\frac{e^{i\beta}-e^{-i\beta}}{2i})$

$=\frac{1}{4i}[(e^{i(\alpha+\beta)}-e^{i(\beta-\alpha)}+e^{i(\alpha-\beta)}-e^{-i(\alpha+\beta)})\pm(e^{i(\alpha+\beta)}+e^{i(\beta-\alpha)}-e^{i(\alpha-\beta)}-e^{-i(\alpha+\beta)})]$

$=\frac{2}{4i}[e^{i(\alpha\pm\beta)}-e^{-i(\alpha\pm\beta)}]$

$=\sin(\alpha\pm\beta)$ ……得証#

$\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta$

證明： $\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta=(\frac{e^{i\alpha}+e^{-i\alpha}}{2})(\frac{e^{i\beta}+e^{-i\beta}}{2})\mp(\frac{e^{i\alpha}-e^{-i\alpha}}{2i})(\frac{e^{i\beta}-e^{-i\beta}}{2i})$

$=\frac{1}{4}\{(e^{i(\alpha+\beta)}+e^{i(\beta-\alpha)}+e^{i(\alpha-\beta)}+e^{-i(\alpha+\beta)})\mp[-(e^{i(\alpha+\beta)}-e^{i(\beta-\alpha)}-e^{i(\alpha-\beta)}+e^{-i(\alpha+\beta)})]\}$

$=\frac{1}{4}[(e^{i(\alpha+\beta)}+e^{i(\beta-\alpha)}+e^{i(\alpha-\beta)}+e^{-i(\alpha+\beta)})\pm(e^{i(\alpha+\beta)}-e^{i(\beta-\alpha)}-e^{i(\alpha-\beta)}+e^{-i(\alpha+\beta)})]$

$=\frac{2}{4}[e^{i(\alpha\pm\beta)}+e^{-i(\alpha\pm\beta)}]$

$=\cos(\alpha\pm\beta)$ ……得証#

$\tan(\alpha\pm\beta)=\frac{\tan\alpha\pm\tan\beta}{1\mp\tan\alpha\tan\beta}$

證明： $\tan(\alpha\pm\beta)=\frac{\sin(\alpha\pm\beta)}{\cos(\alpha\pm\beta)}=\frac{\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta}$

$=\frac{\frac{\sin\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta}\pm\frac{\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}{1\mp\frac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}=\frac{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\pm\frac{\sin\beta}{\cos\beta}}{1\mp\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\cdot\frac{\sin\beta}{\cos\beta}}$

$$=\frac{\tan\alpha\pm\tan\beta}{1\mp\tan\alpha\tan\beta}$$ ……得証#

和差化積、積化和差：

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin(\frac{\alpha+\beta}{2})\cos(\frac{\alpha-\beta}{2})$$

$$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)]$$

證明：已知 $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$ ……(1)

$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$ ……(2)

(1)+(2) $\rightarrow$ $\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)=2\sin\alpha\cos\beta$

所以 $\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)]$ ……得証#

假設：$\alpha+\beta=A$，$\alpha-\beta=B$

則 $\alpha=\frac{A+B}{2}$，$\beta=\frac{A-B}{2}$，代入式中

得 $\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)]$

$$\sin\alpha-\sin\beta=2\cos(\frac{\alpha+\beta}{2})\sin(\frac{\alpha-\beta}{2})$$

$$\cos\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)]$$

證明：

$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos(\frac{\alpha+\beta}{2})\cos(\frac{\alpha-\beta}{2})$$

$$\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)]$$

證明：

$$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin(\frac{\alpha+\beta}{2})\sin(\frac{\alpha-\beta}{2})$$

$$\sin\alpha\sin\beta=\frac{-1}{2}[\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)]$$

證明：

mengwen的筆記

倍角、半角關係：

$$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha}$$

$$\begin{aligned}\cos 2\alpha&=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha\\&=2\cos^2\alpha-1\\&=1-2\sin^2\alpha=\frac{1-\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha}\end{aligned}$$

$$\tan 2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$$

證明：已知 $\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$

$\alpha=\beta$ 代入得解#

$$\cot 2\alpha=\frac{\cot^2\alpha-1}{2\cot\alpha}$$

$$\sin 3\alpha=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha$$

$$\cos 3\alpha=4\cos^3\alpha-3\cos\alpha$$

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$$

$$\cos\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$$

$$\tan\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}}$$
$$=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}=\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

其他（還要再確認！！）

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\ldots$$

for all values of x

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\ldots$$

or all values of x

$$\tan x=x+\frac{x^3}{3}+\frac{}{15}$$

$$\arcsin x=x+\frac{x^3}{6}+\frac{1\times3\times x^5}{2\times4\times5}+\frac{1\times3\times5\times x^7}{2\times4\times6\times7}\cdots$$

for |x| £ 1

$$\arccos x=\frac{p}{2}-\arcsin x$$

$$\arctan x=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\ldots$$ for |x| £ 1.

廣義三角函數：

三角函數在複數上的應用

一、假設 $z=a+bi$（$a,b\in R$），在複數平面上表示為 $P(z)=P(a,b)$，θ 為以 $\overrightarrow{OP}$ 為終邊之有向角，稱為 z 之輻角，$0\le\theta<2\pi$ 稱為 z 之主輻角，以 $\arg z=\theta$ 表示。

假設 $OP=|z|=\sqrt{a^2+b^2}=r$

$a=r\cos\theta$，$b=r\sin\theta$

$z=a+bi=r(\cos\theta+i\sin\theta)$

稱 $r(\cos\theta+i\sin\theta)$ 為 z 的極式。

二、複數的絕對值

定義：假設 $z=a+bi$（$a,b\in R$），z 的絕對值以 $|z|$ 表示。定義 $|z|=\sqrt{a^2+b^2}$。

性質：設 $z_1,z_2,z\in C$

1. $|z_1\cdot z_2|=|z_1|\cdot|z_2|$

2. $|z^n|=|z|^n$（$n\in N$）

3. $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right|=\dfrac{|z_1|}{|z_2|}$

4. $|z_1|-|z_2|\le|z_1+z_2|\le|z_1|+|z_2|$

三、共軛複數

四、定理：

假設 $z_1=r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)$

$z_2=r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)$（$r_1,r_2\ge 0$）

則 $z_1\cdot z_2=r_1r_2[\cos(\theta_1+\theta_2)+i\sin(\theta_1+\theta_2)]$

$\dfrac{z_1}{z_2}=\dfrac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1-\theta_2)+i\sin(\theta_1-\theta_2)]$，（$r_2\neq 0$）

$z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2[\cos(\theta_1+\theta_2)+i\sin(\theta_1+\theta_2)]$

證明：$z_1 \cdot z_2 = [r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)][r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)]$

$= r_1 r_2[(\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2) + i(\sin\theta_1\cos\theta_2 + \cos\theta_1\sin\theta_2)]$

$= r_1 r_2[\cos(\theta_1+\theta_2)+i\sin(\theta_1+\theta_2)]$……得証#

$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1-\theta_2)+i\sin(\theta_1-\theta_2)]$

證明：

五、棣美弗定理：

假設 $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$，$r \geq 0$，$n \in Z$

則 $z^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)$

六、二項方程式：

定理：假設 $x^n = z$（$n \in N$，$z \in C$），其解為 x_1，x_2，x_3，……，x_{n-1}，其中

$$x_k = \sqrt[n]{|z|}(\cos\frac{2k\pi+\theta}{n} + i\sin\frac{2k\pi+\theta}{n})$$

$k = 0,1,2,3,\ldots\ldots,n-1$，$\theta = \arg z$

特例：$x^n = 1$（$n \in N$）

$$\omega = \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}$$

此方程式的解為 $1,\omega,\omega^2,\omega^3,\ldots\ldots,\omega^{n-1}$

三角函數的微分與積分

$$\frac{d}{d\theta}\sin\theta = \cos\theta$$

證明：

證明：已知 $\sin\vartheta = \frac{e^{i\vartheta} - e^{-i\vartheta}}{2i}$，$\cos\vartheta = \frac{e^{i\vartheta} + e^{-i\vartheta}}{2}$

$$\frac{d}{d\vartheta}\sin\vartheta=\frac{1}{2i}\frac{d}{d\vartheta}(e^{i\vartheta}-e^{-i\vartheta})$$
$$=\frac{1}{2i}(ie^{i\vartheta}+ie^{-i\vartheta})$$
$$=\frac{e^{i\vartheta}+e^{-i\vartheta}}{2}$$
$$=\cos\vartheta$$

$$\frac{d}{d\theta}\cos\theta=-\sin\theta$$

證明：已知 $\sin\vartheta=\dfrac{e^{i\vartheta}-e^{-i\vartheta}}{2i}$ ， $\cos\vartheta=\dfrac{e^{i\vartheta}+e^{-i\vartheta}}{2}$

$$\frac{d}{d\vartheta}\cos\vartheta=\frac{1}{2}\frac{d}{d\vartheta}(e^{i\vartheta}+e^{-i\vartheta})$$
$$=\frac{1}{2}(ie^{i\vartheta}-ie^{-i\vartheta})$$
$$=-\frac{e^{i\vartheta}-e^{-i\vartheta}}{2i}$$
$$=-\sin\vartheta$$

$$\frac{d}{d\theta}\tan\theta=1+\tan^2\theta$$

證明：$\dfrac{d}{d\vartheta}\tan\vartheta=\dfrac{d}{d\vartheta}\left(\dfrac{\sin\vartheta}{\cos\vartheta}\right)$

$$=\frac{d}{d\vartheta}(\sin\vartheta\cos^{-1}\vartheta)$$
$$=\left(\frac{d}{d\vartheta}\sin\vartheta\right)\cos^{-1}\vartheta+\sin\vartheta\left(\frac{d}{d\vartheta}\cos^{-1}\vartheta\right)$$
$$=\cos\vartheta\cos^{-1}\vartheta+\sin\vartheta\times(-1)(\cos^{-2}\vartheta)(-\sin\vartheta)$$
$$=1+\left(\frac{\sin\vartheta}{\cos\vartheta}\right)^2=1+\tan^2\vartheta$$

$$\frac{d}{d\theta}\cot\theta=-1-\cot^2\theta$$

證明：

$$\frac{d}{d\theta}\sec\theta=\tan\theta\sec\theta$$

證明：

$$\frac{d}{d\theta}\csc\theta=-\cot\theta\csc\theta$$

證明：

......待續！