向量

mengwen的筆記

☆1 平面向量：

一、有向線段與向量：

1.有向線段：將線段 $\overline{AB}$ 賦予 A 至 B 方向，即稱是由 A 至 B 的有向線段。記為 $\overrightarrow{AB}$ 。其中 A 為起點，B 為終點。有向線段 $\overrightarrow{AB}$ 長度即為線段 $\overline{AB}$ 的長度，記為 $\left|\overrightarrow{AB}\right|$ 。

2.向量（Vector）：具有大小（長度、距離）與方向的量稱為向量。

3.零向量：始點與終點重合的有向線段所代表的向量，稱為零向量，記為 $\vec{O}$ ，零向量 $\vec{O}$ 的長度為 0，而且其方向不定。

4.兩向量的相等：向量 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ ，其方向相同，且長度相等，則稱此二向量為相等，記為 $\vec{a}=\vec{b}$ 。

二、以座標表示法：

1.假設 A、B 的座標分別為 (a_1,a_2) ，(b_1,b_2) ，O 為原點。

則 $\overrightarrow{OA}=(a_1,a_2)$ ，$\overrightarrow{OB}=(b_1,b_2)$ ，$\overrightarrow{AB}=(b_1-a_1,b_2-a_2)$

其中 b_1-a_1 ，b_2-a_2 分別稱為 $\overrightarrow{AB}$ 的 x 分量與 y 分量

$$\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2}$$

2.假設 $\vec{a}=\overrightarrow{OA}$ ，由 $\overrightarrow{OX}$ 繞到 $\overrightarrow{OA}$ 位置的有向角角度，稱為向量 $\vec{a}$ 的方向角。若 $\vec{a}$ 的方向角為 ϑ ，則

$$\vec{a}=(\left|\vec{a}\right|\cos\vartheta,\left|\vec{a}\right|\sin\vartheta)$$

3. $\vec{a}=(a_1,a_2)$ ，$\vec{b}=(b_1,b_2)$

假設 $\vec{a}=\vec{b}$ ，則 $a_1=b_1$ 且 $a_2=b_2$

三、向量加法與減法

1.向量加法：對任意兩個向量$\vec{a}$和$\vec{b}$，取其首尾相接的兩個線段，$\overrightarrow{AB}$和$\overrightarrow{BC}$，如圖，使得$\vec{a}=\overrightarrow{AB}$，

$\vec{b}=\overrightarrow{BC}$，則$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$爲$\vec{a}$和$\vec{b}$的和。

2.假設$\vec{a}=(a_1,a_2)$，$\vec{b}=(b_1,b_2)$，則$\vec{a}+\vec{b}=(a_1+b_1,a_2+b_2)$

3.向量加法的基本性質：

(1) 加法交換律：$\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$

(2) 加法結合律：$(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$

(3) $\vec{a}+\vec{0}=\vec{0}+\vec{a}=\vec{a}$

(4) $\vec{a}+(-\vec{a})=(-\vec{a})+\vec{a}=\vec{0}$

4.向量減法：對任意兩個向量$\vec{a}$和$\vec{b}$，定義：$\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b})$

5.假設$\vec{a}=(a_1,a_2)$，$\vec{b}=(b_1,b_2)$，則$\vec{a}-\vec{b}=(a_1-b_1,a_2-b_2)$

四、向量的係數積

1.假設$\vec{a}$爲一向量，r爲一實數。則r和$\vec{a}$的積記爲$r\vec{a}$。

2.座標表示法：$\vec{a}=(a_1,a_2)$，r爲一實數，則$r\vec{a}=(ra_1,ra_2)$

3.設$\vec{a}$和$\vec{b}$爲任意兩個向量，r和s爲任意兩個實數，則

(1) $r(\vec{a}+\vec{b})=r\vec{a}+r\vec{b}$

(2) $(r+s)\vec{a}=r\vec{a}+s\vec{a}$

(3) $(rs)\vec{a}=r(s\vec{a})$

五、分點公式

1.設 A-P-B，且$\dfrac{\overline{AP}}{\overline{PB}}=\dfrac{m}{n}$，$O$爲任意一點，則$\overrightarrow{OP}=\dfrac{n}{m+n}\overrightarrow{OA}+\dfrac{m}{m+n}\overrightarrow{OB}$

2.設 A-B-P 或 P-A-B 且$\dfrac{\overline{AP}}{\overline{PB}}=\dfrac{m}{n}$，$O$爲任意一點，則$\overrightarrow{OP}=\dfrac{-n}{m-n}\overrightarrow{OA}+\dfrac{m}{m-n}\overrightarrow{OB}$

3.設 M 爲$\overline{AB}$中點，O爲任意一點，則$\overrightarrow{OM}=\dfrac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}}{2}$

六、三角形的重心：假設 G 為△ABC 的重心，O 為任意一點，則 $\overrightarrow{OG}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})$

→ $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$

→ 若 $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\vec{0}$，則 $O=G$

七、三角形的內心：設 I 為△ABC 的內心，$\overline{CB}=a$，$\overline{CA}=b$，$\overline{AB}=c$，O 為任意一點，則

$$\overrightarrow{OI}=\frac{a\overrightarrow{OA}+b\overrightarrow{OB}+c\overrightarrow{OC}}{a+b+c}$$

mengwen的筆記

☆2 平面向量的內積：

一、 兩向量的夾角

設 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 為兩個非零向量

(1) 若 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 方向相同，規定其夾角為 0^0 。

(2) 若 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 方向相反，規定其夾角為 180^0 。

(3) 若 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 不平行，$\vec{a}=\overrightarrow{OA}$，$\vec{b}=\overrightarrow{OB}$，則規定 $\angle AOB$ 為 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 的夾角。

【註】: 若 ϑ 為 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 的夾角，則 $0^0\le\vartheta\le180^0$ 。

二、向量內積：

定義：設 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 為兩個非零向量，且 ϑ 為 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 的夾角。則 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 的內積定義為 $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\vartheta$（其中“‧”讀做 doc）

若 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 其中一個為 0 時，則 $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$

座標表示法：$\vec{a}=(a_1,a_2)$，$\vec{b}=(b_1,b_2)$，則 $\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2$

三、向量內積的性質：

假設 $\vec{a}$ 、$\vec{b}$ 和 $\vec{c}$ 任意三個向量，α 、β 為任意兩個實數，則

1. 交換律：$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$

2. 正定性：$|\vec{a}|^2=\vec{a}\cdot\vec{a}\ge0$ 且 $\vec{a}\cdot\vec{a}=0$ 則 $\vec{a}=\vec{0}$

3. $\vec{a}\perp\vec{b}$，則 $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$（當 $\vec{a}$ 、$\vec{b}$ 有一個為 0 時，可視 $\vec{a}$ 、$\vec{b}$ 為相互垂直）

4. $(\alpha\vec{a})\cdot\vec{b}=\alpha(\vec{a}\cdot\vec{b})=\vec{a}\cdot(\alpha\vec{b})$

5. 分配律：$\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$

$$(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}$$

6. $\vec{a}\cdot(\alpha\vec{b}+\beta\vec{c})=\alpha(\vec{a}\cdot\vec{b})+\beta(\vec{a}\cdot\vec{c})$

四、常用公式：

假設 $\vec{a}$ 、$\vec{b}$ 和 $\vec{c}$ 任意三個向量，α 、β 爲任意兩個實數，則

1. $\left|\vec{a}+\vec{b}\right|^2=\left|\vec{a}\right|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+\left|\vec{b}\right|^2$

2. $\left|\vec{a}-\vec{b}\right|^2=\left|\vec{a}\right|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+\left|\vec{b}\right|^2$

3. $\left|\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}\right|^2=\alpha^2\left|\vec{a}\right|^2+2\alpha\beta(\vec{a}\cdot\vec{b})+\beta^2\left|\vec{b}\right|^2$

4. $\left|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right|^2=\left|\vec{a}\right|^2+\left|\vec{b}\right|^2+\left|\vec{c}\right|^2+2(\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{c}\cdot\vec{a})$

5. $(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})=\left|\vec{a}\right|^2-\left|\vec{b}\right|^2$

五、柯西不等式

1.假設 $\vec{a}$ 、$\vec{b}$ 爲任意兩個向量，$\left|\vec{a}\cdot\vec{b}\right|\le\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|$

2.假設 $a_1,a_2,b_1,b_2\in R$ 則

$(a_1^2+a_2^2)(b_1^2+b_2^2)\ge(a_1b_1+a_2b_2)^2$

六、正投影（正射影）

假設 $\vec{v}=\overrightarrow{OE}$ 爲 $\vec{b}$ 上的單位向量（$\therefore\vec{v}=\dfrac{\vec{b}}{\left|\vec{b}\right|}$），通過 A 點，做直線 OE 的垂線，垂足爲 B 點。稱向量 $\overrightarrow{OB}$ 爲 $\vec{a}$ 在 $\vec{b}$ 上的正投影。

此時恰有一實數 β ，使得 $\overrightarrow{OB}=\beta\vec{v}$ 。稱此實數 β 爲 $\vec{a}$ 在 $\vec{b}$ 上的分量（或投影量）。

$$\beta=\left|\vec{a}\right|\cos\vartheta=\left|\vec{a}\right|(\frac{\vec{a}\cdot\vec{v}}{\left|\vec{a}\right|\left|\vec{v}\right|})=\vec{a}\cdot\vec{v}=\left|\vec{a}\right|\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|}=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\left|\vec{b}\right|}$$

其中ϑ爲$\vec{a}$和$\vec{b}$的夾角。

故$\vec{a}$在$\vec{b}$上的正投影爲$\overrightarrow{OB}=\beta\vec{v}=(\vec{a}\cdot\vec{v})\vec{v}=(\vec{a}\cdot\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|})(\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|})=(\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|^2})\vec{b}$

七、面積：OACB 爲一平行四邊形，其中$\vec{a}=\overrightarrow{OA}$，$\vec{b}=\overrightarrow{OB}$，則 OACB 面積爲$\sqrt{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2}$

【註】：假設$\vec{a}=(a_1,a_2)$，$\vec{b}=(b_1,b_2)$，則

四邊形 OACB 面積：$S=\sqrt{(a_1^2+a_2^2)(b_1^2+b_2^2)-(a_1b_1+a_2b_2)^2}$

$=\sqrt{(a_1b_2-a_2b_1)^2}=|a_1b_2-a_2b_1|$

$=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$的絕對值

三角形 OAB 面積：$S=\frac{1}{2}|a_1b_2-a_2b_1|$

mengwen的筆記

☆3 平面直線：

一、直線的參數方程式：

1. 假設$P_0(x_0,y_0)$爲一定點，$\vec{v}=(a,b)$爲一定向量，且$\vec{v}\neq\vec{0}$，通過P_0且與$\vec{v}$平行的直線參數方程式爲

$$\begin{cases} x=x_0+at \\ y=y_0+bt \end{cases}，t\in R（t 稱爲參數）$$

2. 假設$P_1(x_1,y_1)$和$P_2(x_2,y_2)$爲相異兩定點。

(1) 直線$\overleftrightarrow{P_1P_2}$的參數方程式爲$\begin{cases} x=x_1+(x_2-x_1)t \\ y=y_1+(y_2-y_1)t \end{cases}$，（$t\in R$）

$$\boxed{\frac{x-x_1}{y-y_1}=\frac{x_2-x_1}{y_2-y_1}\ \rightarrow\ \frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=t}$$

$$\rightarrow \begin{cases} x = x_1 + (x_2 - x_1)t \\ y = y_1 + (y_2 - y_1)t \end{cases}$$

(2) 線段 $\overline{P_1P_2}$ 的方程式為 $\begin{cases} x = x_1 + (x_2 - x_1)t \\ y = y_1 + (y_2 - y_1)t \end{cases}$ ，（ $0 \le t \le 1$ ）

(3) 射線 $\overrightarrow{P_1P_2}$ 的方程式為 $\begin{cases} x = x_1 + (x_2 - x_1)t \\ y = y_1 + (y_2 - y_1)t \end{cases}$ ，（ $t \ge 0$ ）

3. 過 (x_0, y_0) 且斜角為 α 之直線參數方程式為

$$\begin{cases} x = x_0 + t\cos\alpha \\ y = y_0 + t\sin\alpha \end{cases}, \ t \in R$$

4. 直線的一般參數方程式為 $\begin{cases} x = a + bt \\ y = c + dt \end{cases}$ ， $t \in R$ ，其中， $a, b, c, d \in R$ 且 $b^2 + d^2 \ne 0$

二、兩條直線的交角：

1. 兩直線 L_1 ： $a_1x + b_1y + c_1 = 0$
   L_2 ： $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ 相交於一點，令 ϑ 為其交角，則

$$\cos\vartheta = \pm \frac{a_1a_2 + b_1b_2}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}\sqrt{a_2^2 + b_2^2}}$$

【註】：若 ϑ 為銳角，則 $\cos\vartheta = \left| \dfrac{a_1a_2 + b_1b_2}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}\sqrt{a_2^2 + b_2^2}} \right|$

2. 兩直線 L_1 和 L_2 ，其斜率分別為 m_1 、 m_2
   (1) $L_1 \perp L_2$ ， $m_1 \cdot m_2 = -1$
   (2) 假設 L_1 和 L_2 不垂直， ϑ 為其交角

   則 $\tan\vartheta = \dfrac{m_1 - m_2}{1 + m_1 \cdot m_2}$ 或 $\tan\vartheta = \dfrac{m_2 - m_1}{1 + m_2 \cdot m_1}$

三、點到直線的距離：

(1) 點到線的距離

點 $P(x_0, y_0)$ 到直線 L ： $ax + by + c = 0$ 的距離為 $\dfrac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

(2) 線到線的距離 - 兩條平行線的距離

兩平行線 $ax+by+c=0$ 和 $ax+by+c_1=0$ 的距離爲 $\dfrac{|c-c_1|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

四、交角平分線

假設 L_1 ： $a_1x+b_1y+c_1=0$ 和 L_2 ： $a_2x+b_2y+c_2=0$ 爲相交兩直線，其交角平分線爲

$$\frac{a_1x+b_1y+c_1}{\sqrt{a_1^2+b_1^2}}=\pm\frac{a_2x+b_2y+c_2}{\sqrt{a_2^2+b_2^2}}$$

五、三角形的內心

假設△ABC 的三個頂點爲 $A(x_1,y_1)$ 、 $B(x_2,y_2)$ 、 $C(x_3,y_3)$ 且 $\overline{CB}=a$ ， $\overline{CA}=b$ ， $\overline{AB}=c$ ，則△ABC 的內心座標爲 $A(x_1,y_2)$ $(\dfrac{ax_1+bx_2+cx_3}{a+b+c},\dfrac{ay_1+by_2+cy_3}{a+b+c})$

☆4 空間中的向量：

一、空間：在空間中任取一點 O 點當作原點，通過 O 點做互相垂直的三條直線，分別稱爲 x 軸、y 軸、z 軸。
可說：原點 O 和 x、y、z 三軸組成了空間座標系。

二、座標平面：三個座標軸中任意兩個座標軸，都可以決定一個座標平面。由 x 軸、y 軸組合的平面稱 xy 平面。以此類推。

三、掛限：三個座標平面把整個空間劃分爲八個部分。每一個部分稱爲一個掛限。

四、空間中的距離：

1.長方體的長、寬、高分別爲 a、b、c，則對角線長爲 $\sqrt{a^2+b^2+c^2}$

2.空間中的兩個點 $P_1(a_1,b_1,c_1)$ 和 $P_2(a_2,b_2,c_2)$ 間的距離

$$\overline{P_1P_2}=\sqrt{(a_1-a_2)^2+(b_1-b_2)^2+(c_1-c_2)^2}$$

☆5 空間向量的內積：

一、空間中的向量

設點 $P_1(a_1,b_1,c_1)$ 和 $P_2(a_2,b_2,c_2)$ ，則向量 $\overrightarrow{P_1P_2}=(a_2-a_1,b_2-b_1,c_2-c_1)$ ，

$$\left|\overrightarrow{P_1P_2}\right|=\sqrt{(a_2-a_1)^2+(b_2-b_1)^2+(c_2-c_1)^2}$$

二、方向角與方向餘弦

(1) 若$\overrightarrow{OA}$與 x 軸、y 軸、z 軸的夾角各爲α、β、γ。其中$0\le\alpha,\beta,\gamma\le\pi$。則$\alpha$、$\beta$、$\gamma$ 稱爲$\overrightarrow{OA}$的方向角。$\cos\alpha$、$\cos\beta$、$\cos\gamma$ 稱爲$\overrightarrow{OA}$的方向餘弦。

(2) 設$\overrightarrow{OA}=(a,b,c)$則$\cos\alpha=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$、$\cos\beta=\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$、$\cos\gamma=\dfrac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$

$\therefore\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$

【註】1.任意非零向量的方向餘弦的平方和等於 1

2.並非任取α、β、γ 角，即可當成一向量之方向角。

(3) 假設$|\vec{a}|=r$，$\vec{a}$ 方向角爲α、β、γ，，則$\vec{a}=r(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$

三、空間向量的加減與係數積

(1) 設$\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$，$\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$，γ 爲實數

則 $\vec{a}+\vec{b}=(a_1+b_1,a_2+b_2,a_3+b_3)$

$\vec{a}-\vec{b}=(a_1-b_1,a_2-b_2,a_3-b_3)$

$\lambda\vec{a}=(\gamma a_1,\gamma a_2,\gamma a_3)$

(2) 分點公式：

假設$A(x_1,y_1,z_1)$和$B(x_2,y_2,z_2)$爲空間中相異兩點

(1) 設 A-P-B，且$\dfrac{\overline{AP}}{\overline{PB}}=\dfrac{m}{n}$

則 P 點座標爲$\left(\dfrac{mx_2+nx_1}{m+n},\dfrac{my_2+ny_1}{m+n},\dfrac{mz_2+nz_1}{m+n}\right)$

(2) 設 A-B-P 或 P-A-B 且$\dfrac{\overline{AP}}{\overline{PB}}=\dfrac{m}{n}$

則 P 點座標爲$\left(\dfrac{mx_2-nx_1}{m-n},\dfrac{my_2-ny_1}{m-n},\dfrac{mz_2-nz_1}{m-n}\right)$

四、空間向量的內積：

定義：設$\vec{a}$和$\vec{b}$爲兩個非零向量，且ϑ爲$\vec{a}$和$\vec{b}$的夾角。則$\vec{a}$和$\vec{b}$的內積定義爲$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\vartheta$（其中“‧”讀做 doc）

座標表示法：$\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$，$\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$，則$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$

五、向量內積的性質

1. 交換律：$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$
2. 正定性：$|\vec{a}|^2=\vec{a}\cdot\vec{a}\ge 0$ 且$\vec{a}\cdot\vec{a}=0$則$\vec{a}=\vec{0}$
3. $(\alpha\vec{a})\cdot\vec{b}=\alpha(\vec{a}\cdot\vec{b})=\vec{a}\cdot(\alpha\vec{b})$，其中$\alpha$爲實數。
4. 分配律：$\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$

   $(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}$

六、$\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$，$\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$且$\vec{a}\ne 0$、$\vec{b}\ne 0$，夾角爲ϑ。

則$\cos\vartheta=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\dfrac{a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\cdot\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}}$

七、若$\vec{a}\ne 0$、$\vec{b}\ne 0$，但$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$則$\vec{a}$和$\vec{b}$垂直。

八、柯西不等式

1. $|\vec{a}||\vec{b}|\ge|\vec{a}\cdot\vec{b}|$
2. $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$，$\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$，則$(a_1^2+a_2^2+a_3^2)(b_1^2+b_2^2+b_3^2)\ge(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)^2$

   等號成立的條件：$\vec{a}\,//\,\vec{b}$ 或 $\vec{a}$和$\vec{b}$至少有一項爲$\vec{0}$。

九、面積、體積公式：

假設$\vec{a}=\overrightarrow{OA}=(a_1,a_2,a_3)$，$\vec{b}=\overrightarrow{OB}=(b_1,b_2,b_3)$，$\vec{c}=\overrightarrow{OC}=(c_1,c_2,c_3)$則

(1) $\vec{a}$和$\vec{b}$所張成的平行四邊形 OADB 的面積$=\sqrt{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2}=|\vec{a}\times\vec{b}|$

(2) △OAB 面積$=\frac{1}{2}\sqrt{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2}$

(3) 由$\vec{a}$和$\vec{b}$和$\vec{c}$所張成的平行六面體的體積為$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$的絕對值。

十、正投影（正射影）

設$\vec{a}$和$\vec{b}$皆非零向量，則向量$\vec{a}$在$\vec{b}$方向上的正射影為$(\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|^2})\vec{b}$

mengwen的筆記

☆6 空間中的平面：

一、 平面方程式：

1. 法線：垂直一平面的直線，稱為此平面的法線。

2. 法線向量：設 L 為平面 E 的一條法線，且交平面於 P 點，在 L 上取一點 Q，則$\overrightarrow{PQ}$稱為此平面的法線向量。

3. 平面方程式：

(1) 通過$P(x_0,y_0,z_0)$且法線向量為(a,b,c)的平面方程式為

$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$

可寫成$ax+by+cz=d$，其中$d=ax_0+by_0+cz_0$

(2) 不共線的三點$A(x_1,y_1,z_1)$、$B(x_2,y_2,z_2)$、$C(x_3,y_3,z_3)$，可決定一平面

平面方程式為$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0$（即$\overrightarrow{AB}\cdot(\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{BC})=0$）

(3) 以 a、b、c 分別為 x 軸、y 軸、z 軸截距的平面方程式為$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$（但$abc\neq 0$）

二、兩平面的夾角：

1. 由兩平面的法線向量，可求出兩平面的夾角，另一夾角為其輔角。

2. 兩平面為E_1：$a_1x+b_1y+c_1z=d_1$和E_2：$a_2x+b_2y+c_2z=d_2$，其法線向量各為$\vec{n}_1=(a_1,b_1,c_1)$和$\vec{n}_2=(a_2,b_2,c_2)$，夾角為ϑ

mengwen的筆記