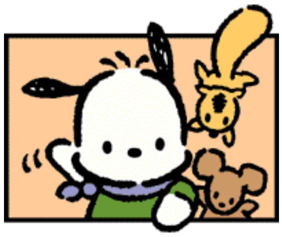
排列組合與機率

⊙1 關於集合
⊙2 排列
⊙3 組合
⊙4 二項式定理
⊙5 機率



⊙1 關於集合

交集（∩）：A 交集 B，亦即，A and B
聯集（∪）：A 聯集 B，亦即，A or B

⊙2 排列

一、排列：由 n 種物品中取出 m 個排成一列，其排列方式有 P_m^n 種。

二、直線排列

1.可重複：由 n 種不同的物品中取 m 個排成一列，此 m 個可重複，稱爲重複排列。
其排列方式有 n^m 種。

2.不可重複：由 n 種不同的物品中取 m 個排成一列，此 m 個不可重複。
$n \geq m$，排列方式有 nP_r。

【註】1.若 $m > n$，則排列總數爲 0。
2.規定：$0! = 1$。

三、環形排列

(1) n 個元素的環形排列的總數爲：
(2) n 個元素取 m 個之環形排列的總數爲：

⊙3 組合

一、組合公式

由 n 個相異物品中，任意不重複的取出 m 個，不計前後次序的組合方法有 C_m^n 或 $\binom{n}{m}$ 種。

【註】1.在 n 個中取 m 個，所以知 $n \geq m$ 且 $m \in N \cup \{0\}$。

2.公式： $C_m^n = \dfrac{P_m^n}{m!} \qquad \Rightarrow P_m^n = C_m^n \times m!$

$$= \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\ldots\cdot(n-m+1)}{m\cdot(m-1)\cdot(m-2)\cdot\ldots\ldots\cdot 3\cdot 2\cdot 1}$$

$$= \frac{n!}{(n-m)!m!}$$

3.餘集合觀念 $C_m^n = C_{n-m}^n$

二、<u>巴斯卡</u>定理： $C_m^n = C_m^{n-1} + C_{m-1}^{n-1}$

證明：已知 $C_m^n = \dfrac{n!}{(n-m)!m!}$

$$C_m^{n-1} + C_{m-1}^{n-1} = \frac{(n-1)!}{(n-1-m)!m!} + \frac{(n-1!)}{(n-1-m+1)!(m-1!)}$$

$$= \frac{n-m}{n-m}\frac{(n-1)!}{(n-1-m)!m!} + \frac{m}{m}\frac{(n-1!)}{(n-m)!(m-1!)}$$

$$= \frac{(n-m)(n-1)!}{(n-m)!m!} + \frac{m(n-1!)}{(n-m)!m!}$$

$$= \frac{n(n-1)!}{(n-m)!m!}$$

$$= \frac{n!}{(n-m)!m!}$$

$$= C_m^n$$

三、重複組合

由 n 個相異物品中，任意取出 m 個（可重複）的組合方式有 H_m^n 或 S_m^n 個。

公式： $H_m^n = C_m^{n+m-1}$

$$H_m^n = H_{m-1}^n + H_m^{n-1}$$

四、由 n 個相異物品中，取出 1 件，或 2 件，或 3 件，或……，或全選的組合方式有 $2^n - 1$ 種。

由 n 個相異物品中，取出 p 個 a 相同，或 q 個 b 相同，或 r 個 c 相同，且 $p+q+r=n$ 則，

每次選取 1 件，或 2 件，或 3 件，或……，或全選的組合方式有$(p+1)(q+1)(r+1)-1$種。

⊙4 二項式定理

一、二項式定理：

設$x,y\in R$且$n\in N$則

$$(x+y)^n=C_0^n x^n+C_1^n x^{n-1}y+C_2^n x^{n-2}y^2+......+C_{n-1}^n xy^{n-1}+C_n^n y^n$$

展開式的第$r+1$項為$C_r^n x^{n-r}y^r$。

二、由二項式定理得到：

(1) 令$x=y=1$得$C_0^n+C_1^n+C_2^n+......+C_n^n=2^n$

(2) 令$x=1$、$y=-1$得$C_0^n+C_2^n+C_4^n+......=C_1^n+C_3^n+C_5^n+......=2^{n-1}$

(3) 令$x=1$、$y=2$得$C_0^n+2C_1^n+4C_2^n+......+2^n\cdot C_n^n=3^n$

三、其他公式

(1) $\sum_{k=1}^{n}k\cdot C_k^n=1\cdot C_1^n+2\cdot C_2^n+3\cdot C_3^n+......+n\cdot C_n^n=n\cdot 2^{n-1}$

證明：

(2) $\sum_{k=0}^{n}\frac{C_k^n}{k+1}=\frac{C_0^n}{1}+\frac{C_1^n}{2}+\frac{C_2^n}{3}+......+\frac{C_n^n}{n+1}=\frac{2^{n+1}-1}{n+1}$

證明：

四、多項式定理：

設 $x, y, z \in R$ 且 $n \in N$ ，則多項式 $(x+y+z)^n$ 展示之一般項爲 $\dfrac{n!}{p!q!r!}x^p y^q z^r$ 且 $p+q+r=n$ ， $p,q,r \in N \cup \{0\}$ 。

【註】多項式定理可以用二項式定理展開，再展開。

⊙5 機率