

SIR model and its modifications

林君豪(S06210019) *

吳桂光

*Email:jeremy87121410110@gmail.com

摘要

SIR 模型是一種描述傳染病動態的分類模型，該模型將總體分為幾個部分，每個隔間應具有相同的特性。SIR 代表按模型劃分的三個部分 Susceptible(可能感染者)、Infectious(已感染者)、Recovered(康復者)，透過 python 繪圖來模擬流行性傳染病的趨勢，甚至是以實際數據下去分析套用，看看是否和真實情況相符。

研究計畫內容

(一) 研究動機與研究問題

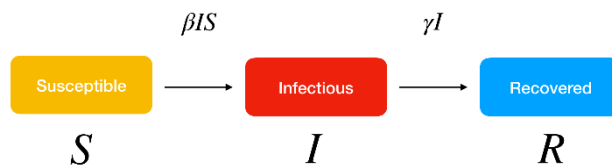
由於目前全球爆發 covid-19 的疫情，我們便想去了解其爆發多久，還有預測何時會趨緩，SIR 模型的起源是 20 世紀初，1927 年 Kermack 和 McKendrick 的重要著作，模型通常與常微分方程一起運行，但也可以與隨機框架一起使用，該框架更現實，但分析起來卻要複雜得多。

$$\frac{dS}{dt} = -\beta IS$$

$$\frac{dI}{dt} = \beta IS - \gamma I$$

$$\frac{dR}{dt} = \gamma I$$

(圖一):SIR Model 基本微分方程



(圖二):SIR Model 隔間彼此關係

SIR 模型允許我們使用常微分方程來描述每個隔間中的人數， β 是控制通過暴露可以傳播多少疾病的參數，它由接觸的機會和疾病傳播的可能性決定， γ 是表示在特定時期內可以恢復多少疾病的參數，人們一旦康復，便獲得了免疫力，他們沒有機會再次受到感染。

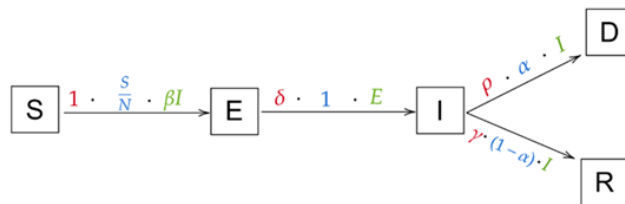
另外 Basic reproduction number (R_0) 也會影響傳染病規模。

R_0 ：一位感染者能傳染給多少未感染者的數目
 = 感染者每天感染的人數 x 感染者被感染的天數
 = $\beta * D = \beta / \gamma$

(二) 研究方法及步驟

以 python 鍵入 SIR Model 之微分方程繪然後畫出設定好 β 值及 γ 值的 SIR 模型。

之後多了潛伏期(E)和死亡(D)這兩種情況，而這種，我們也是使用 Python 來去及繪圖。並試著計算出此微分方程，而目前也是以 Python 畫出設定好 δ 值及 ρ 值的 SIR 模型。



(圖三): 加入潛伏期(E)和死亡(D)後彼此關係

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dt} &= -\beta \cdot I \cdot \frac{S}{N} \\ \frac{dE}{dt} &= \beta \cdot I \cdot \frac{S}{N} - \delta \cdot E \\ \frac{dI}{dt} &= \delta \cdot E - (1 - \alpha) \cdot \gamma \cdot I - \alpha \cdot \rho \cdot I \\ \frac{dR}{dt} &= (1 - \alpha) \cdot \gamma \cdot I \\ \frac{dD}{dt} &= \alpha \cdot \rho \cdot I \end{aligned}$$

(圖四): 加入潛伏期(E)和死亡(D)後之微分方程

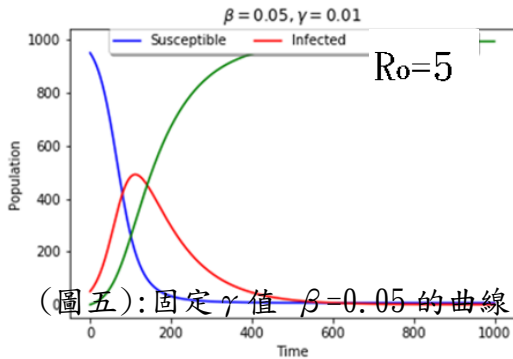
之後，我們要帶入真實的數據，數據的來源為 WHO 世界衛生組織公告的數據，但不為隨時更新之數據，而是從 2020 年 1 月至下載當天之數據，去分析現實中此傳染病的威力如何，並對其數據做圖形的擬合分析，和模型計算出來的結果有沒有不一樣，並比較看看兩者圖形的相似度是不是相當高，並嘗試得到 α 值和 β 值去計算出此微分方程所代表的數值。

接下來嘗試導入 AI 人工智慧之技術，給定過去某段時間之數據，讓它能夠自己對已發生的情況做擬合，並對於無法完美擬合之情況進行修正，並能夠去對未來的情況做預測。

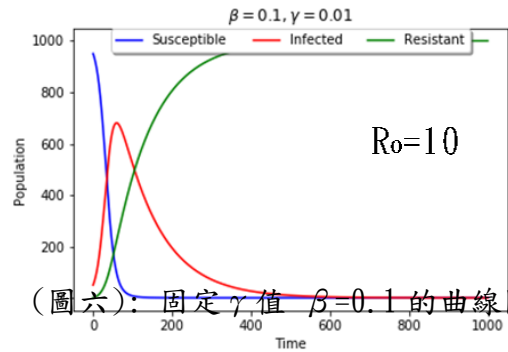
(三) 結果及討論

在本次實驗中，成功用 python import SIR Model 匯出了基本包含 S、I、R 三種曲線。

首先更改 β 值及 γ 值來去看看曲線的差異，可以看到傳染力 (β 值) 越高時，其感染速度越快，將 β 值調高其 R_0 值也會跟著變高，而 R_0 值越高就可以明顯看出，該地區傳染速度較快。

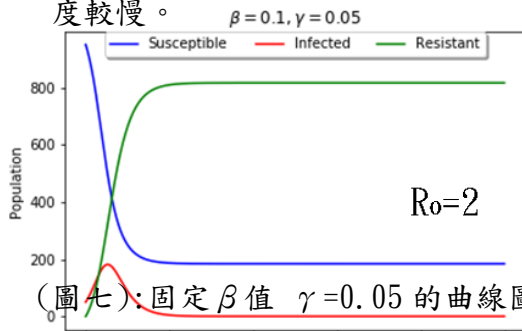


(圖五): 固定 γ 值 $\beta=0.05$ 的曲線圖

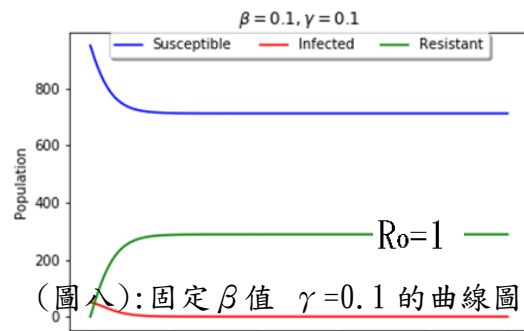


(圖六): 固定 γ 值 $\beta=0.1$ 的曲線圖

另外可以看到康復力 (γ 值) 越高時，其被感染人數就沒有那麼多，疫情也康復較快，其 R_0 值也會隨 γ 值變大而變小，也顯示出此地區之傳染速度較慢。

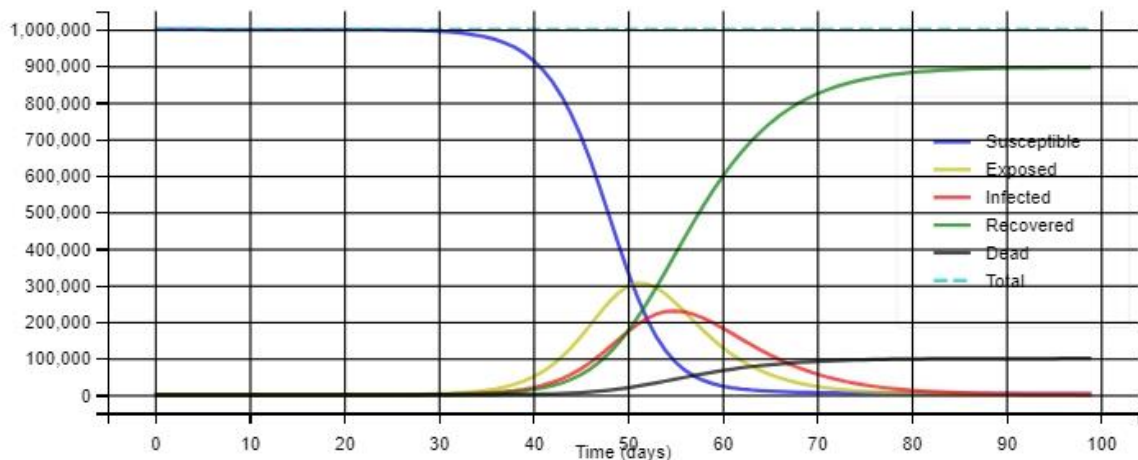


(圖七): 固定 β 值 $\gamma=0.05$ 的曲線圖



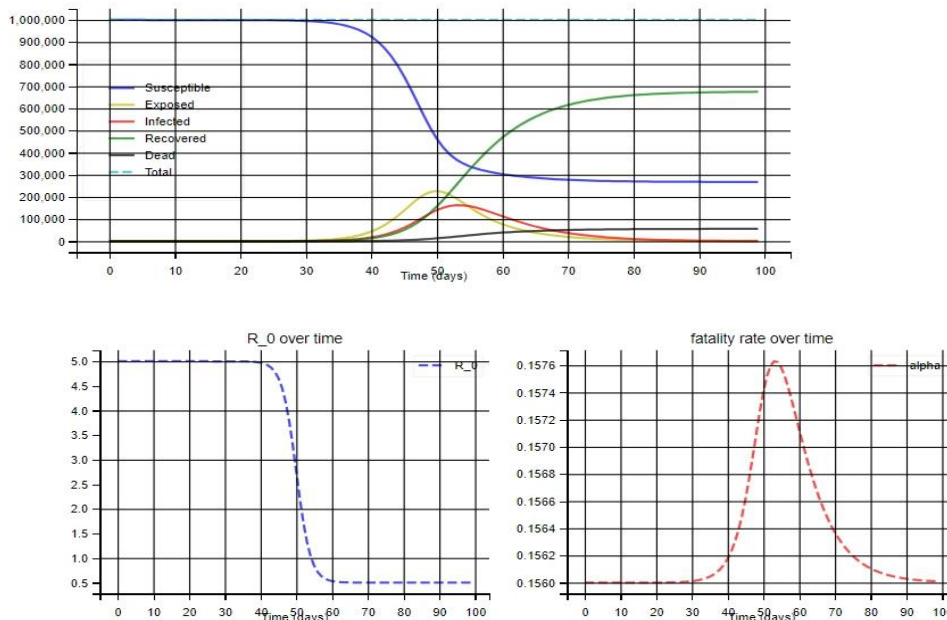
(圖八): 固定 β 值 $\gamma=0.1$ 的曲線圖

接下來加入另外兩種情況潛伏期 (E) 和死亡 (D) 下去繪圖，而繪出之圖形也是由自己事先設定好的數值，而設定的 δ 值為 $1/5$ ，其 R_0 值固定為 5，可以看出感染的程度還是相當的高。



(圖九): R_0 值為 5 且含 S、E、I、R、D 5 項隔間之曲線圖

之後將 R_0 隨時間變化，一開始也是從 5 開始，逐漸降至 0.5 的過程。



(圖十): R_0 值從 5 至 0.5 且含 S、E、I、R、D 5 項隔間之曲線圖，及 R_0 值變化、死亡率變化曲線圖

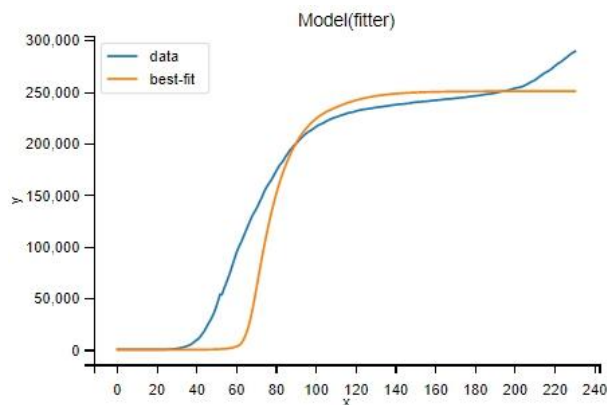
可以看到隨著 R_0 逐漸降低的過程中，可被感染的人數會越來越少，至 R_0 變至 1 以下時，幾乎就不會有人會被感染，而死亡率的部分就會到了高峰的時候逐漸降低。

R_0 值隨時間變化的情況就會有許多外在因素影響導致 R_0 值的降低或增加，然而這個圖形沒辦法判斷出有什麼樣的情況，只能從數據判斷出大概各個情況人數的變化，連感染人數也不會全部感染完，相較固定 R_0 值，感染人數會全部感染完，但這個情況明顯就和真實情況有些差距，並不符合真實情況，所以將帶入實際數據來去比較設定的圖形，兩者間的差異。

(四) 預期結果

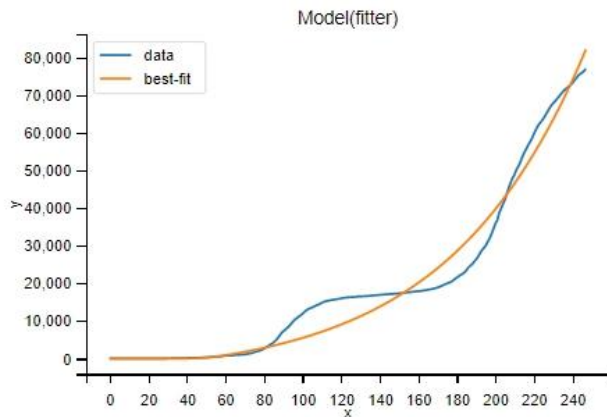
目前，已使用 Pandas 讀取 WHO 世界衛生組織的實際病例數據，並有擬合出累積感染人數的圖形。

這一張是擬合義大利的圖形，可以看到真實的數據(藍線)並無和計算畫出的線(橘線)完全吻合，但其趨勢是相當的接近。



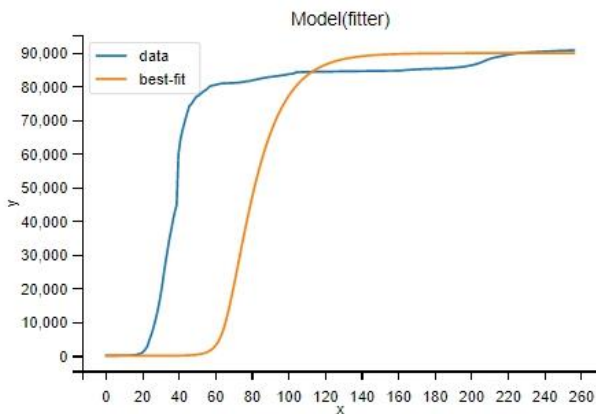
(圖十一): 義大利累積感染人數擬合之圖形

接著看擬合日本的圖形，也和義大利一樣沒有成功的吻合上，其趨勢也是略有相似，重合的部分也較義大利多。



(圖十二): 日本累積感染人數擬合之圖形

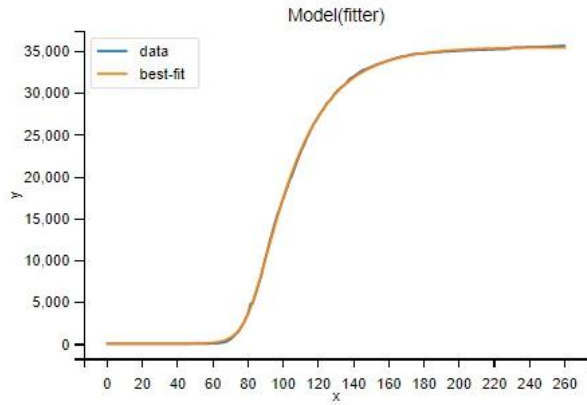
最後看中國的部分，跟前兩張一樣，都沒辦法完全吻合，但這個的趨勢又相對於日本來說重合的地方太少，雖然趨勢形狀差不多。



(圖十三): 中國累積感染人數擬合之圖形

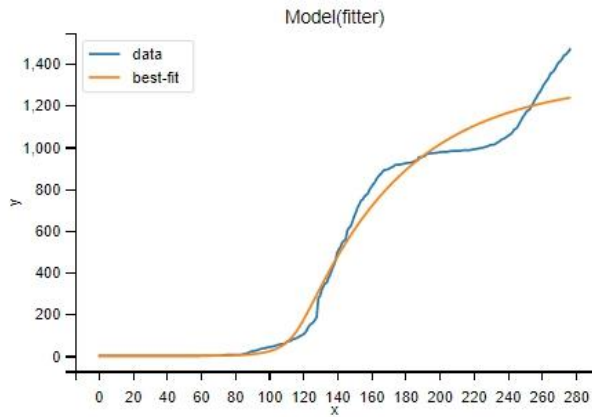
上面 3 張圖接沒辦法做到完美的擬合，有可能的原因為各個時間段各國有做出什麼樣的作為去控制疫情的發展，但從數據上是只能知道人數的差異而已，之後會先將數據時間段縮短，看看這樣有沒有辦法得到吻合的擬合，並再去檢查數據是否有問題，嘗試得到長時間吻合的擬合圖形，並嘗試去得到 α 值以及 β 值，不過由於目前是在除錯的階段因此也會對這個模型再去做更詳細的探討。

將累積感染人數的疊圖改為對義大利的累積死亡人數做疊圖後可以發現，義大利的數據和計算出來的結果是完全一樣的，而且沒有任何凸出的地方。



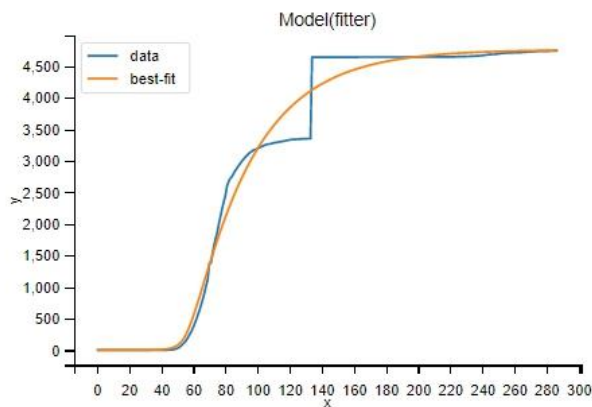
(圖十四):義大利累積死亡人數擬合之圖形

不過，在換成日本後卻發生了數據和計算結果不一樣的狀況，而且吻合的情況只有在前 80 天左右相同，後面卻出現了很多和這個計算結果不相同的情況，大概只有某些地方是有交界的情況。



(圖十五):日本累積死亡人數擬合之圖形

換成中國後，圖形依然為前 60 至 80 天左右相符合，並不像義大利為完全吻合，但其他時間是有規律的，而且還會呈現人數垂直上升的情況，和一般正常情況會有落差，相較於一般趨勢線呈曲線上升的情況，多了某一段數據相同的情況，會再去探討是不是數據有誤，或是當時有任何情況造成此結果。



(圖十六): 中國累積死亡人數擬合之圖形

根據上方的結果可知，義大利的模擬情況相當成功，反觀另外兩個國家，吻合的情況明顯變少，之後會試著將時段拆開來做疊圖，來去分段做疊圖，並嘗試檢查數據是否有誤，之後就對確認無誤的時間段進行微調，來去嘗試看看，分段的結果有沒有辦法得到吻合的疊圖，目標將義大利以外的國家之疊圖，整段合起來後也能讓圖看來是整段。

(五) 結論

目前已做到感染人數及死亡人數的疊圖，接下來會朝著其他項目也放上一個疊圖，然後會先讓目前的感染人數的部分設法達到完全吻合的疊圖，以及繼續修改其他國家之累積死亡人數達到吻合的疊圖，並且朝著其他項目完全吻合努力，之後再嘗試導入 AI 人工智慧的技術，去做到對未來情況的預測。

(六) 參考文獻

W. Kermack and A. McKendrick, "A contribution to the mathematical theory of epidemics," *Proceedings of the Royal Society of London*, vol. A 115, pp. 700 - 721, 1927.