

濾波器

實驗目的

1. 瞭解高通濾波器(high pass filter)、帶通濾波器 (band pass filter)、低通濾波器(low pass filter)、帶拒濾波器(band reject filter)特性與原理。
2. 瞭解以運算放大器組成的主動濾波器特性。

I 簡介

濾波器常用於訊號處理，例如擷取感測元件輸出的類比訊號時，很容易因外在因素產生雜訊導致失真，故需使用濾波器(filter)除去不必要的雜訊，將特定頻率的訊號顯示出來。

濾波器分為被動(passive filters)與主動濾波器(active filters)，頻率在 1MHz 以上大都會用被動濾波器，此濾波器由電阻、電容、電感所組成，無功率增益，頻率較難調整，功能僅只過濾雜訊，頻率在 1MHz 以下大都會用主動濾波器(active filters) 此濾波器由電阻、電容、主動元件所組成，有功率增益、頻率較容易調整，主動元件包括電晶體、運算放大器等，主動濾波器的優點如下：

1. 利用運算放大器提出適當的訊號增益，使訊號通過濾波器不會衰減。
2. 不使用電感，使濾波器可製成體積小的積體電路。
3. 利用運算放大器的高輸入阻抗與低輸出阻抗，使阻抗匹配容易，不易造成阻抗被配不好而產生負載效應。
4. 利用不同特性的組合，可設計成所想要的頻率響應。

II 原理

想要瞭解濾波器就要從組成元件的特性分析起，濾波器的組成元件有電阻(R)，電容(C)和電感(L)，直流電路中電阻對電流有限制流動的作用，在交流電路中，電容及電感也會對電流有限制流動的作用，稱之為阻抗(Reactance)，電容和電感的阻抗較電阻複雜，因會「隨著流經電路的電流頻率而變化」的效應，所以電阻效應不隨頻率變化，但阻抗會隨著頻率改變而改變。

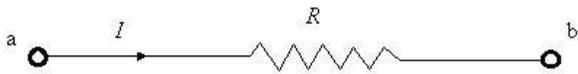
濾波器的組成元件的特性分析如下！

交流電路中電阻、電感、電容的電流與電壓相位關係：

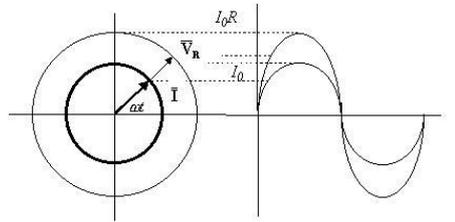
(1) 電阻的電流與電壓的相位關係

交流電流 $I = I_0 \sin \omega t$ 流經一電阻 R ，由歐姆定律知道 ab 兩段的電壓差為 $V_R = IR$ ，得 $V_R = I_0 R \sin \omega t$

所以可以知道是沒有相位差，圖五是電阻的電流和電壓的相位圖示。



圖四：電阻在交流電路中

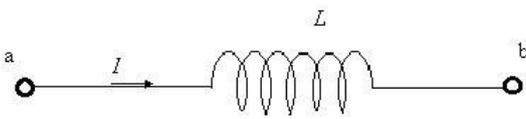


圖五：電流與電阻相位圖。

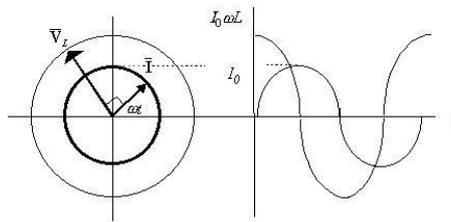
(2) 電感的電流與電壓的相位關係

交流電流 $I = I_0 \sin \omega t$ 流經一電感 L ，由**法拉第定律**知道 ab 兩段的電壓差為 $L \frac{dI}{dt}$ ，得

$V_L = I_0 \omega L \cos \omega t = I_0 \omega L \sin(\omega t + \frac{\pi}{2})$ ，很明顯的電感的電壓和電流有 90 度的相位差，而且電感的電壓是超前電流相位 90 度，下圖是電感的電流和電壓的相位圖示。



圖六：電感在交流電路中



圖七：電流與電感相位圖。

(3) 電容的電流與電壓的相位關係

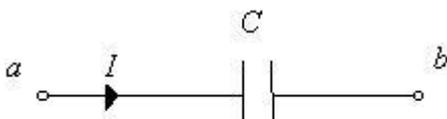
交流電流 $I = I_0 \sin \omega t$ 流經一電容 C ，ab 兩段的電壓差為 $V_C = Q/C$ ，

$$Q = \int Idt = \int I_0 \sin \omega t dt = -\frac{I_0}{\omega} \cos \omega t + K$$

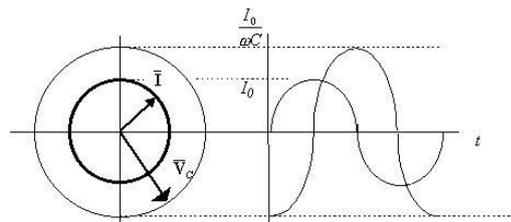
K 和初始條件有關，先令其為 0，所以可得：

$$V_C = -\frac{I_0}{\omega C} \cos \omega t = \frac{I_0}{\omega C} \sin(\omega t - \frac{\pi}{2})$$

電容的電壓和電流有 90 度的相位差，電容的電壓是落後電流相位 90 度。



圖八：交流電路中的電容



圖九：交流電路中電流和電阻的相位圖

了解完基本元件特性後，我們再來看阻抗！

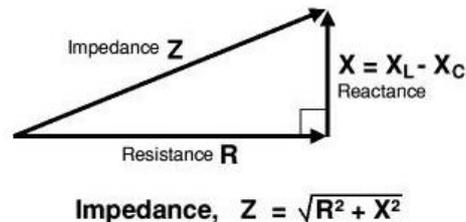
電容、電感、電感的阻抗：

阻抗分為兩部份:

電阻 R (與頻率變化無關)

電抗 X (隨著電容和電感的頻率變化而變化)

因為流經電容和電感內的電流和電壓會有相位差，所以電阻 R 和電抗 X 不能直接相加變成阻抗，必須用電抗和電阻的向量相加方式，如下。



對於正弦或餘弦的交流電路較為便利的運算分析是使用複數分析，電容的電抗稱之為容抗 X_C ，電壓 $V_0 \cos(\omega t)$ 用複數表示是 $V_0 e^{j\omega t}$ ，用尤拉表示式 $e^{j\omega t} = \cos \omega t + j \sin \omega t$ ， $j = \sqrt{-1}$ ，所以實際的電壓和電流在複數的表示式會包含 $e^{j\omega t}$ ，取實部: $V(t) = \text{RE}(V e^{j\omega t})$ ， $I(t) = \text{RE}(I e^{j\omega t})$ ，換句話說：

$$V(t) = V_0 \cos(\omega t) = \text{RE}(V_0 e^{j\omega t})$$

$$I(t) = C(dV/dt) = j\omega C * \text{RE}[V_0 e^{j\omega t}] = \text{RE}\left[\frac{V_0 e^{j\omega t}}{\frac{1}{j\omega C}}\right] = \text{RE}\left(\frac{V_0 e^{j\omega t}}{X_C}\right)$$

所以電容的容抗 $X_C = 1/j\omega C$

同理，電感的電抗稱之為感抗 X_L ，電流 $I_0 \sin(\omega t)$ 用複數表示式 $\text{Im}[I_0 e^{j\omega t}]$ ，

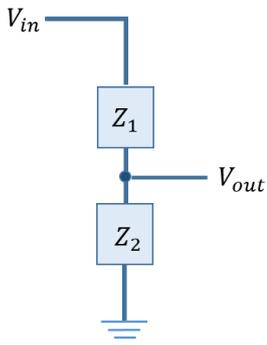
$$V(t) = L(dI/dt) = L \frac{d\text{Im}[I_0 e^{j\omega t}]}{dt} = j\omega L * \text{Im}[I_0 e^{j\omega t}] = X_L * \text{Im}[I_0 e^{j\omega t}]$$

所以電感的感抗 $X_L = j\omega L$

當 R ， L ， C 三個元件串聯時，此電路的阻抗 Z 可以寫成 $Z = R + \frac{1}{j\omega C} + j\omega L$ ，

被動濾波器:

考量串聯一個電阻和其他原件(電容，電感...)等等，如下圖，根據歐姆定律可得



$$I = \frac{V_{in}}{Z_{total}},$$

$$Z_{total} = Z_1 + Z_2,$$

$$V_{out} = V_{in} \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2}$$

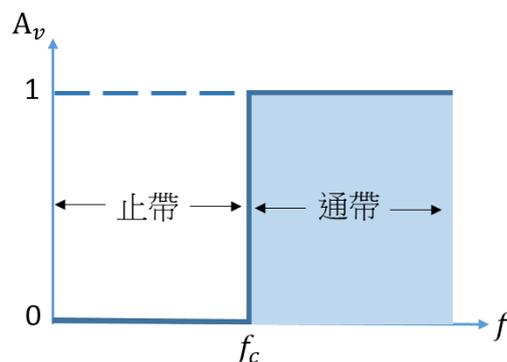
分貝

分貝是濾波器常用的單位，電壓增益之分貝值定義如下： $A_{dB} = 20 \log A$

其中對數是以 10 為底。dB 是分貝之簡寫 $\left(1_{dB} = \frac{1}{10} \text{Bel}\right)$ 。

高通濾波器

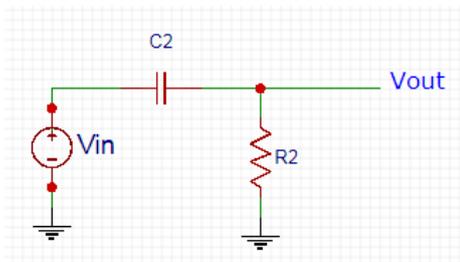
所謂高通濾波器是指高於截止頻率的信號可通過，下圖為高通濾波器(high pass filter, HPF)理想的頻率響應圖，頻率由 0 到截止頻率間的所有信號不能通過，高於截止頻率以上的信號都可以通過，由 0 到截止頻率之間的頻率稱為止帶(stop band)，高於截止頻率以上的頻率稱為通帶(pass band)，止帶與通帶間呈現衰減的部分稱為轉態(transition)，在理想的高通濾波器的通帶截止頻率為垂直的線，等於無漸進的衰退。



高通濾波器(high pass filter, HPF)理想的頻率響應圖

高通濾波器電路的數學運算及特性:

(1)電路的數學運算:



電容阻抗 $Z_1 : X_c$
電阻 $Z_2 : R$

根據複數的歐姆定律，可得

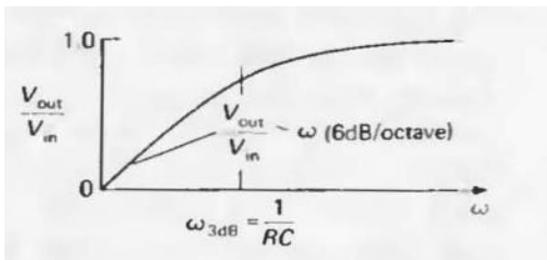
$$I = \frac{V_{in}}{Z_{total}} = \frac{V_{in}}{R + X_c} = \frac{V_{in}}{R - (j/\omega C)} = \frac{V_{in}[R + j/\omega C]}{R^2 + 1/\omega^2 C^2}$$

$$V_{out} = V_{in} \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2} = \frac{V_{in}[R + j/\omega C] R}{R^2 + 1/\omega^2 C^2}$$

$$V_{out} = (V_{out} V_{out}^*)^{1/2} = \frac{R}{[R^2 + 1/\omega^2 C^2]^{1/2}} V_{in} = \frac{1}{(1 + \frac{1}{R^2 \omega^2 C^2})^{1/2}} V_{in} = \frac{2\pi f RC}{[1 + (2\pi f RC)^2]^{1/2}} V_{in}$$

$$\text{增益 } A_v = \frac{V_{out}}{V_{in}} = \frac{1}{(1 + \frac{1}{R^2 \omega^2 C^2})^{1/2}} \dots\dots(1)$$

由式(1)的式子可繪出，高通濾波的頻率響應如下：



在低頻區 ω 極小， $\frac{1}{R\omega C} \rightarrow \infty$ ， $\frac{V_{out}}{V_{in}}$ 會趨近於 0，訊號不通！

在高頻區 ω 極大， $\frac{1}{R\omega C} \rightarrow 0$ ， $\frac{V_{out}}{V_{in}}$ 會趨近於 1，訊號可通！

當 $R\omega C=1$ 是訊號通與不通的臨界點，此時的頻率定義為截止頻率 $f_c = \frac{1}{2\pi RC}$

(2) 截止頻率 $f_c = \frac{1}{2\pi RC}$

(3) 頻率響應：

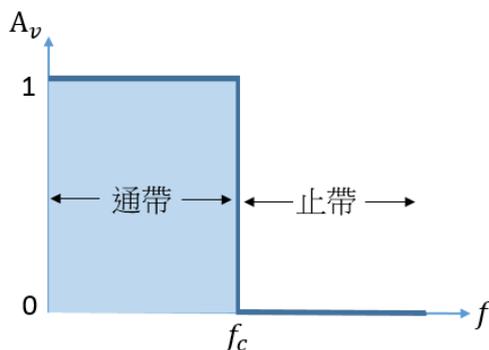
$$\text{當頻率 } f = f_c \text{ 時，電壓增益取絕對值 } |A_v| = \frac{1}{\sqrt{1 + [\frac{f_c}{f}]^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+1}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0.707$$

$20 \log|A_v| = -3\text{dB}$ ，此處為最大的電壓增益 $-3\text{dB}(0.707)$ 時的頻率。

低通濾波器

低通濾波器是指低於截止頻率的信號都可通過，下圖為低通濾波器 (low pass filter, LPF) 理想的頻

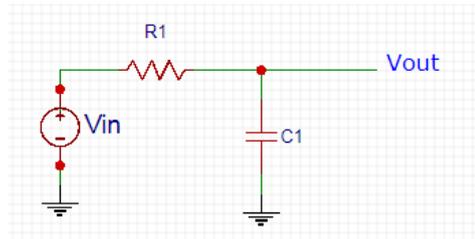
率響應圖，頻率由 0 到截止頻率間可使所有信號通過，高於截止頻率以上的信號都無法通過，由 0 到截止頻率之間的頻率稱之為通帶(pass band)，高於截止頻率以上的頻率稱為止帶(stop band)，通帶與止帶間呈現衰減部分稱為轉態(transition)，在理想的低通濾波器的通帶截止頻率為垂直的線，等於無漸近的衰減。



低通濾波器(low pass filter, LPF)理想的頻率響應圖

低通濾波器電路的數學運算及特性:

(1)電路的數學運算:



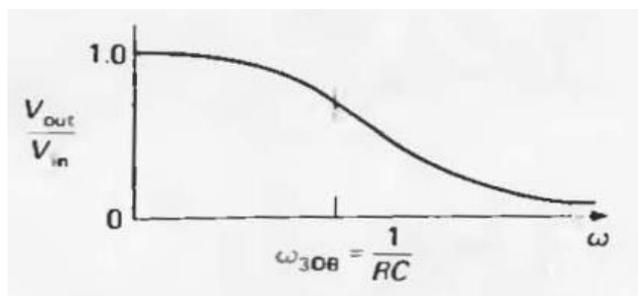
電阻 $Z_1: R$
 電容阻抗 $Z_2: X_c$

同理低通濾波器的 $V_{out} = V_{in} \frac{Z_2}{Z_1+Z_2} = \frac{-j/\omega C}{R-(j/\omega C)} V_{in}$

$$V_{out} = (V_{out} V_{out}^*)^{1/2} = \frac{1}{(1+\omega^2 R^2 C^2)^{1/2}} V_{in}$$

增益 $A_v = \frac{V_{out}}{V_{in}} = \frac{1}{(1+\omega^2 R^2 C^2)^{1/2}} \dots\dots\dots(2)$

由式(2)的式子可繪出，低通濾波的頻率響應如下：



在低頻區 ω 極小， $R\omega C \gg 1$ ， $\frac{V_{out}}{V_{in}}$ 會趨近於 1，訊號可通！

在高頻區 ω 極大， $R\omega C \ll 1$ ， $\frac{V_{out}}{V_{in}}$ 會趨近於 0，訊號不通！

當 $R\omega C = 1$ 是訊號通與不通的臨界點，此時的頻率定義為截止頻率 $f_c = \frac{1}{2\pi RC}$

(2) 截止頻率 $f_c = \frac{1}{2\pi RC}$

(3) 頻率響應：

a. 當頻率趨近於 $f_c (f \rightarrow f_c)$ 時， $A_v = 1$ ， $20 \log A_v = 0 \text{dB}$

b. 當頻率 $f = f_c$ 時，電壓增益取絕對值 $|A_v| = \frac{1}{\sqrt{1 + \left[\frac{f}{f_c}\right]^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+1}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0.707$

$20 \log |A_v| = -3 \text{dB}$ ，此處為最大的電壓增益 $-3 \text{dB} (0.707)$ 時的頻率。

帶通濾波器

帶通濾波器(band pass filter)只允許某個頻帶寬度的信號通過，電路是使用三個基本的元件電容、電感、電阻。

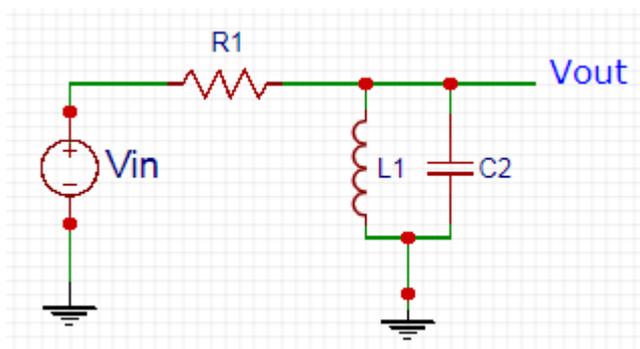
當電容與電感結合用於特殊電路時稱為主動濾波器，在特定頻率響應下會產生大峰值！這些電路可用於各種音頻和射頻設備，所以我們來快速瀏覽一下 LC 電路。

並聯電容電感的電抗：

$$\frac{1}{Z_{LC}} = \frac{1}{Z_L} + \frac{1}{Z_C} = \frac{1}{j\omega L} + \frac{1}{\frac{1}{j\omega C}} = j \left[\omega C - \frac{1}{\omega L} \right]$$

$$\text{所以 } Z_{LC} = \frac{j}{\left(\frac{1}{\omega L}\right) - \omega C}$$

帶通濾波器是 電阻和串在一起，如下。



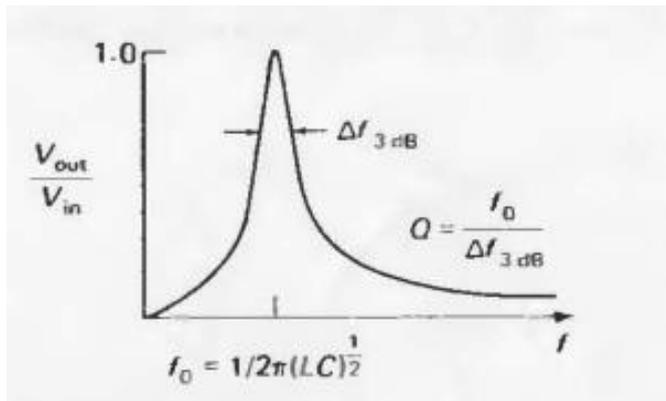
$$Z_{total} = R + Z_{LC} = R + \frac{j}{\left(\frac{1}{\omega L}\right) - \omega C}$$

$$\frac{V_{out}}{V_{in}} = \frac{Z_{LC}}{R+Z_{LC}} = \frac{1}{\left[\frac{1}{Z_{LC}}\right]R+1} = \frac{1}{jR\left[\omega C - \frac{1}{\omega L}\right]+1}$$

當並聯電容電感的電抗趨近於無限大 $|Z_{LC}| \rightarrow \infty$, $\frac{V_{out}}{V_{in}} = 1$

響應頻率： $f = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$, $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$

帶通濾波器的響應頻率如下：

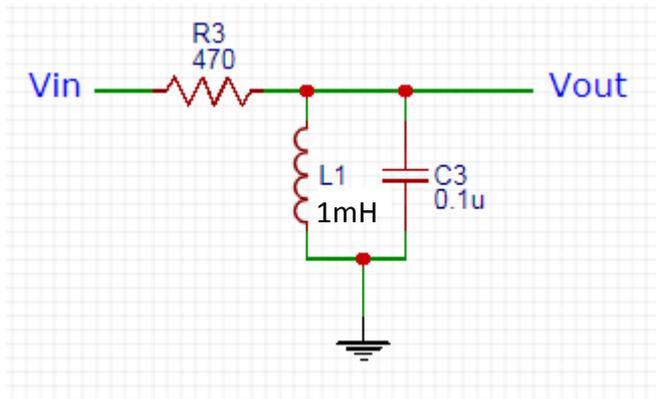


c. 帶通濾波器 (Band-Pass Filter)

訊號產生器調整輸入正弦波訊號 V_{in} : 10Vp-p、電容 0.1u、電阻 470 歐姆，電感 1mH 頻率如下表所示。

(1)將量測的輸出電壓 V_{out} 填入表中，並計算下列表格值。

(2)繪出濾波器頻率響應圖: dB vs. f (Hz)



頻率(HZ)	500	1K	5K	7.5K	10K	12.5K	15K	16K	17K	18K	19K
$V_{out}(V_{p-p})$											
$A_v = V_{out}/V_{in}$											
$20\log A_v$ [dB]											

頻率(HZ)	20K	21K	22K	25K	30K	35K	40K	50K	70K	100K
$V_{out}(V_{p-p})$										
$A_v = V_{out}/V_{in}$										
$20\log A_v$ [dB]										

將上圖的電路並聯的的電感和電容改為串聯如下，並重複上述步驟:

