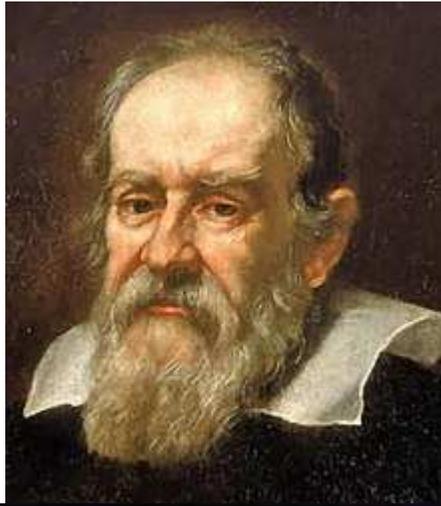


自然科學概論：物理單元(1)

古典力學

- 伽利略的自由落體
- 等加速度運動之計算
- 牛頓三大運動定律
- 動能、位能、力學能守恆
- 能量轉換與功率



伽利略做實驗證明，感受到引力的物體並不是呈等速運動，而是呈加速度運動；物體只要不受到外力的作用，就會保持其原來的靜止狀態或勻速運動狀態不變。他又發表慣性原理闡明，未感受到外力作用的物體會保持不變其原來的靜止狀態或等速運動狀態。伽利略被譽為「現代科學之父」。



1609

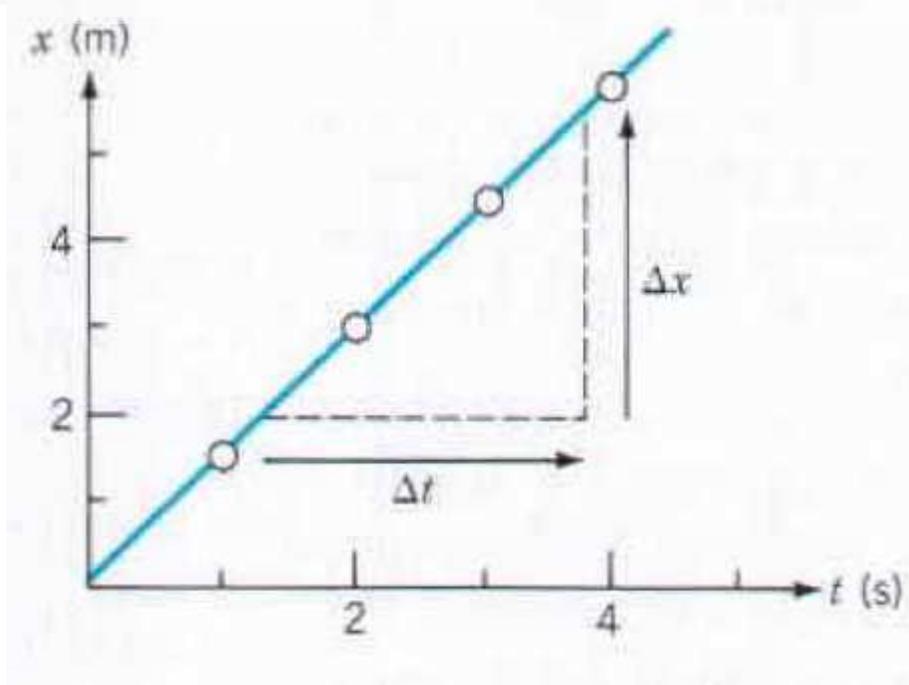
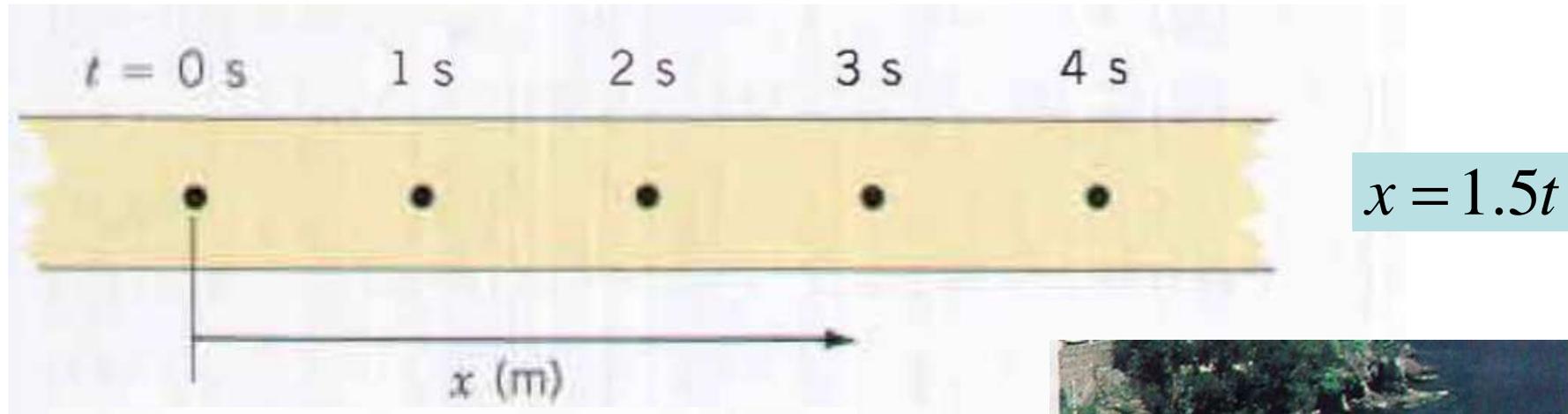
Four hundred years ago Galileo gave birth to modern astronomy with the humblest of instruments, now preserved at a history of science museum in Florence, Italy. A one-and-a-half-inch lens displayed in an ornate frame was ground in 1609. Others followed. Fitted into simple wooden tubes just a few feet long, Galileo's lenses magnified the heavens, bringing Earth's moon, sunspots, and nearby planets into focus.

他對觀測天文學的貢獻包括運用望遠鏡確認金星的盈虧，發現木星最大的四個衛星（除了地球之外有其他的星體也帶有衛星，撼動了地心說）以及觀測並分析太陽黑子。

在運動學當中我們根據物體運動的軌跡，探討下面兩種類型的運動：第一種運動是直線運動，包括等速度運動、等加速度運動與變加速度運動。第二種運動的軌跡是圓，稱為圓週運動，我們將探討等速率圓週運動(Unit.2)。



如何描述運動？ \rightarrow 時 (t) 與空 (x) \rightarrow $X(t)$



等速度運動：

$$x = vt$$

等速度運動是最簡單的運動。假設運動的起點時間為 $t=0$ ，起點的位置為原點 $x=0$ ，所以起始的條件為 $x(0)=0$ 。假設速度為 v ，則位置對時間的函數行為如下：

$$x(t) = vt$$

$$v(t) = \frac{dx(t)}{dt} = v = \text{常數}，\text{速度為常數；}$$

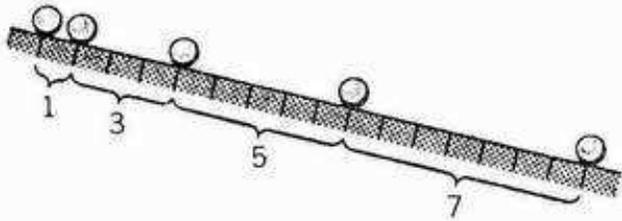
$$a(t) = \frac{dv(t)}{dt} = 0，\text{加速度為0。}$$

位置的單位是長度的單位，國際標準單位是以公尺(m)為長度單位，時間是以秒(s)為單位，所以速度的物理單位應該是公尺/秒(m/s)。譬如說一輛在高速公路上直線行駛的汽車，行駛的速度為時速100公里，那麼該車車速的國際單位應為

$$v = 100 \times \frac{1000}{3600} = 27.78\text{m/s}。$$

用斜面來衝淡落體實驗的重力

由於自由落體的運動過程太快，在當時的條件下，無法進行實際測量。為了“沖淡重力”，充分放慢運動，伽利略精心設了斜面實驗和單擺運動的研究，驗證了「下落距離 S 與下落時間 t 的平方成正比」的關係，找到了正確的落體運動的規律。伽利略的斜面實驗，是最後證實他的自由落體通過的距離與下落時間平方成正比的假設是正確的一個關鍵性的實驗



伽利略發現當球從斜面滾下時，在每一連續等時距內所行之距離比為1:3:5:7，如此一直下去。他推論出全部的距離 x 是以全部所經過的時間 t 的平方而增加，亦即， $x \propto t^2$ 。



伽利略正在表演斜面實驗

(2)等加速度運動：

一個物體的運動速度隨著時間越來越快或越來越慢，那麼這個物體運動的加速度就不為0。但是如果速度隨著時間成正比關係，那麼運動的加速度將維持不變，這種運動稱為等加速度運動，自由落體運動就是一個典型的等加速度運動。假設時間 $t=0$ 的時候，物體的運動速度為 v_0 ，既然加速度是一個常數，那麼速度對時間的函數關係 $v(t)$ 為下列方程式

$$v(t) = v_0 + at$$

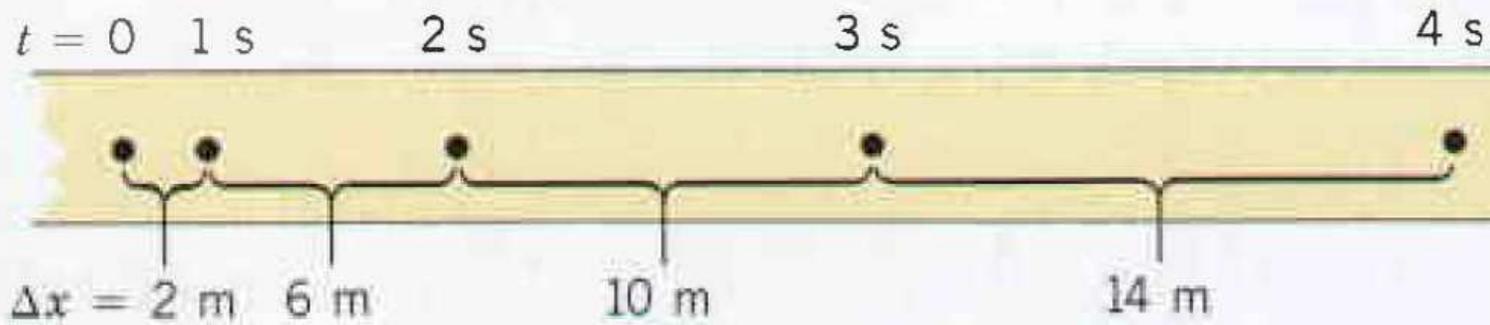
再進一步假設初始時間($t=0$)物體的位置為 x_0 ，那麼位置對時間的函數關係 $x(t)$ 如下：

$$x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$$

可以推導出下列公式

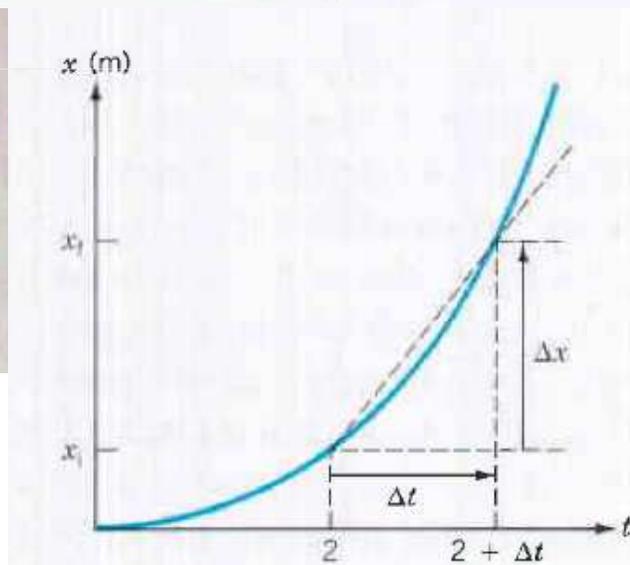
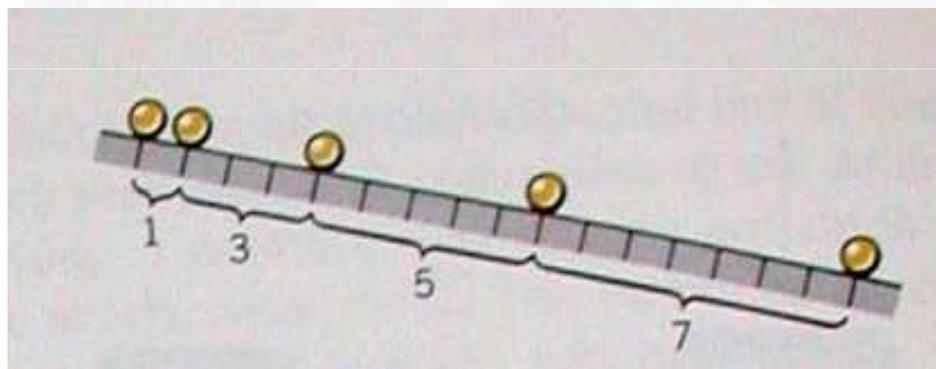
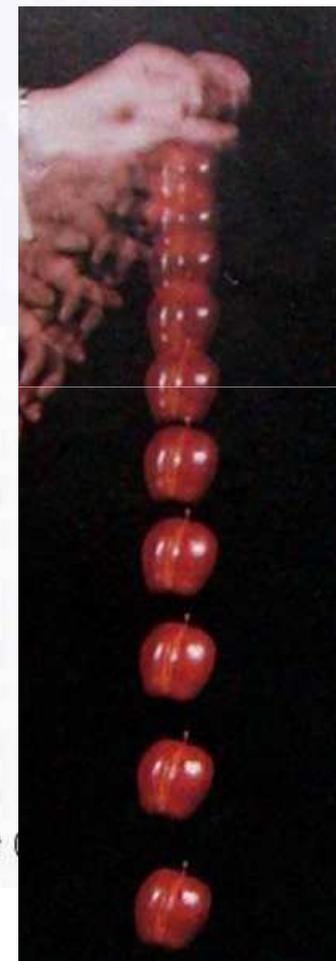
$$v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0)$$

根據加速度的定義，我們不難發現加速度的單位應該是速度除以時間，也就是 m/s^2 。



t (s) :	0	1	2	3	4
x (m) :	0	2	8	18	32

$$x = 2t^2$$



$$v = \frac{dx}{dt}$$

$$v = 4t$$

$$a = \frac{dv}{dt}$$

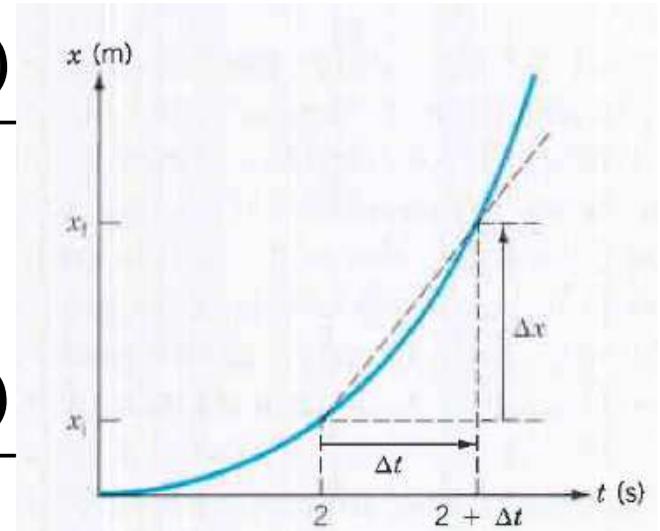
$$a = 4$$

$$x = 1/2gt^2$$

等加速度運動

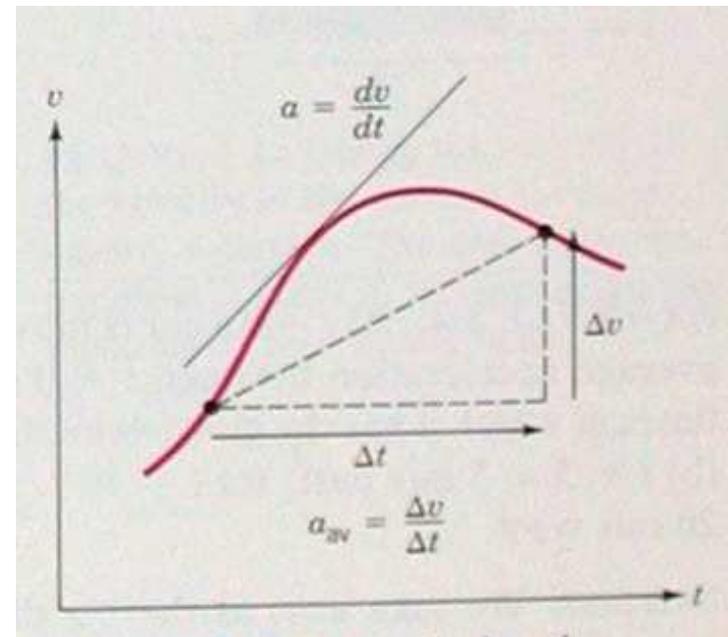
$$\bar{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \xrightarrow{\Delta t \rightarrow 0} v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx(t)}{dt}$$

$$\bar{a} = \frac{\Delta v}{\Delta t} \xrightarrow{\Delta t \rightarrow 0} a = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv(t)}{dt}$$



加速度的單位： **m/s^2**

相當於 $v-t$ 圖的斜率



v_0 = 物體在時間 $t = 0$ 時的速度(初速度)

v = 物體在時間 t 時的速度(末速度)

x_0 = 物體在時間 $t = 0$ 時的座標

x = 物體在時間 t 時的座標

等加速度運動公式

1. $v = v_0 + at$

2. $x = x_0 + v_0t + \frac{1}{2}at^2$

3. $v^2 = v_0^2 + 2aS$

位移 $S = x - x_0$

例題:一個投手鉛錘的向上投出一個棒球，棒球的初始速度為 12 m/s，請問 (a) 這個棒球經過多長的時間會到達最高點？ (b)最高點到地面之間的距離為多少？ (c)請問球達到座標 $y=5$ 公尺的時間為何？

(a)考慮自拋出到最高點的運動過程，初速度為 v_0 ，末速度為 $v=0$ ，求飛行時間 $t=?$

$$t = \frac{v - v_0}{a} = \frac{0 - 12}{-9.8} = 1.2 \text{ (s,秒)}$$

(b)考慮自拋出到最高點的運動過程，初速度為 v_0 ，末速度為 $v=0$ ；初始坐標為 $y_0=0$ ，末坐標為 y

$$y = \frac{v^2 - v_0^2}{2a} = \frac{0 - 12^2}{2(-9.8)} = 7.3$$

(c)令 y 坐標為5，求時間 $t=?$

$$y = v_0 t + \frac{1}{2}(-g)t^2$$

$$4.9t^2 - 12t + 5 = 0$$

$$5 = 12t + \frac{1}{2}(-9.8)t^2$$

$$t = 0.53, 1.9 \text{ s}$$

例題: 假設一個太空船在太空深處以 $a=9.8 \text{ m/s}^2$ 加速飛行。(a) 如果它從靜止出發，多久才能達到光速的十分之一？(b) 在此期間它走了多遠距離？

(a)

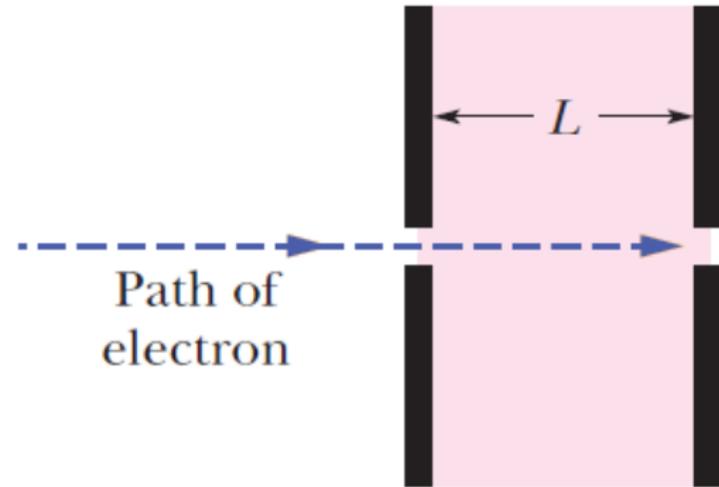
$$v = at, t = \frac{v}{a} = \frac{2 \times 10^7}{9.8} = 3.1 \times 10^6 \text{ s}$$

(b)

$$x = \frac{1}{2}at^2 = \frac{1}{2}(9.8) \left(\frac{3 \times 10^7}{9.8} \right) = 4.59 \times 10^{13} \text{ m}$$

例題：一電子以初速 $v_0 = 1.5 \times 10^5 \text{ m/s}$ ，以等加速度進入長一公分的加速區，以 $v = 5.7 \times 10^6 \text{ m/s}$ 的速度射出，問加速度為何？

$$v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0)$$



$$a = \frac{v^2 - v_0^2}{x - x_0} = \frac{(5.7 \times 10^6)^2 - (1.5 \times 10^5)^2}{2(0.01)} = 1.6 \times 10^{15} \frac{m}{s^2}$$

●NEWTON'S FIRST LAW

(慣性定律)

Every body continues in its state of rest or of uniform motion in a straight line unless it is compelled to change that state by forces impressed upon it.

●NEWTON'S SECOND LAW

(作用力定律)

力的單位：牛頓 $N = \text{kg m/s}^2$

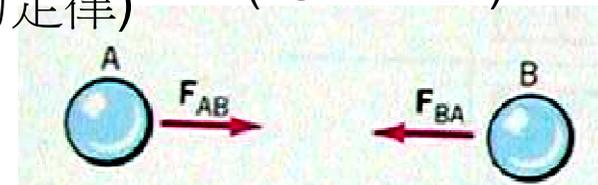
The net force, ΣF , acting on a particle of mass m produces an acceleration $a = \Sigma F/m$ in the direction of the net force.



●NEWTON'S THIRD LAW

(作用力與反作用力定律)

(1642-1727)

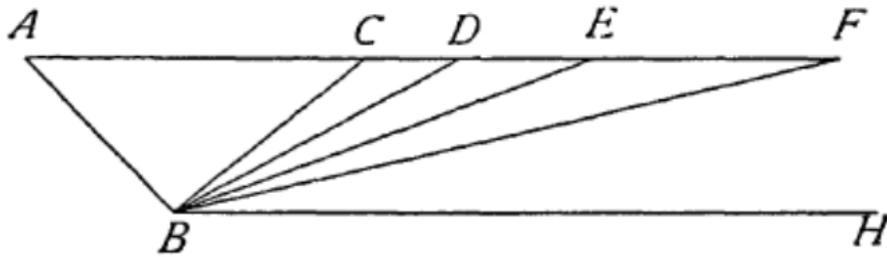


$$F_{AB} = -F_{BA}$$

The force exerted on A by B is equal and opposite to the force exerted on B by A

(1)牛頓第一運動定律

牛頓第一運動定律表明，除非有外力施加，物體的運動速度不會改變。根據這定律，假設沒有任何外力施加或所施加的外力之和為零，則運動中物體總保持勻速直線運動狀態，靜止物體總保持靜止狀態。物體所顯示出的維持運動狀態不變的這性質稱為慣性。所以，這定律又稱為慣性定律。物體的慣性與其質量有關。牛頓運動定律只成立於慣性參考系。



在牛頓提出第一運動定律之前，伽利略主張，只有施加外力，才能改變物體速度；維持物體速度不變，不需要任何外力。為了證實他的主張是正確的，伽利略做了一個實驗。如右圖所示，讓靜止的小球從點A滾下斜面AB，滾到最

底端後，小球又會滾上斜面BC，假設兩塊斜面都非常的平滑、摩擦係數超小，而且空氣阻力微弱，則小球會滾到與點A同高度的點C；假設斜面是BD、BE或BF，小球也同樣地會滾到與點A同高度的位置；假設斜面是水平面BH，則該小球永遠不能滾到先前的高度，因此會不停地呈勻速直線運動。伽利略於是總結，運動中的物體會持續地以勻速直線運動，假若不碰到任何阻礙。這一個理論剛被提出時不被其他學者接受，因為當時大多數學者不了解摩擦力與空氣阻力的本質，不過伽利略的實驗以可靠的事實為基礎，經過抽象思維，抓住主要因素，忽略次要因素，更深刻地反應了自然規律。伽利略的點子導致牛頓的第一定律——不施加外力，則沒有加速度，因此物體會維持速度不變。

- 靜止的物體會保持靜止，除非有淨外力施加於這物體。
- 運動中的物體不會改變其速度，除非有淨外力施加於這物體。
- 注意到速度是個向量，物體運動速度的大小與方向都不會改變。

(2)牛頓第二運動定律

牛頓第二定律表明，物體的加速度與施加的淨外力成正比，與物體的質量成反比，方向與淨外力方向相同。這定律又稱為「加速度定律」。以方程式表達，

$$\vec{F} = m \vec{a}$$

其中， \vec{F} 是淨外力向量，是所有施加於物體的力的向量和， m 是質量， \vec{a} 是加速度。另一個觀點，這裡實際上定義了質量為淨外力與加速度的比率，這樣定義的質量稱為物體的慣性質量，是物體的固有屬性，與外力無關。這樣在數量上，施加於物體的淨外力等於物體質量與加速度的乘積。國際標準制中，將力的單位定義為使得單位質量的物體得到單位加速度的所需，這與慣性質量的定義相容。具體來說，力、加速度、質量的單位分別規定為牛頓（**N**）、公尺/秒平方（**m/s²**）·公斤（**kg**）。施加1牛頓的力於質量為1公斤的物體，可以使此物體的加速度為1 **m/s²**。也就是說，**1 N=1 kg·m/s²**。淨外力只能造成物體朝著同方向的加速度運動。假定物體的質量、初始速度與初始位置為已知量，則從施加於物體的淨外力，可以應用第二定律計算出物體的運動軌跡，計算方法包括微積分以及計算機的數值計算。

(3)牛頓第三運動定律

在古典力學裏，牛頓第三定律表明，當兩個物體互相作用時，彼此施加於對方的力，其大小相等、方向相反。力必會成雙結對地出現：其中一道力稱為「作用力」；而另一道力則稱為「反作用力」，又稱「抗力」；兩道力的大小相等、方向相反，並且作用在同一條線上。它們之間的分辨，是純然任意的；任何一道力都可以被認為是作用力，而其對應的力自然地成為伴隨的反作用力。這成對的作用力與反作用力稱為「配對力」。牛頓第三定律又稱為「作用與反作用定律」。

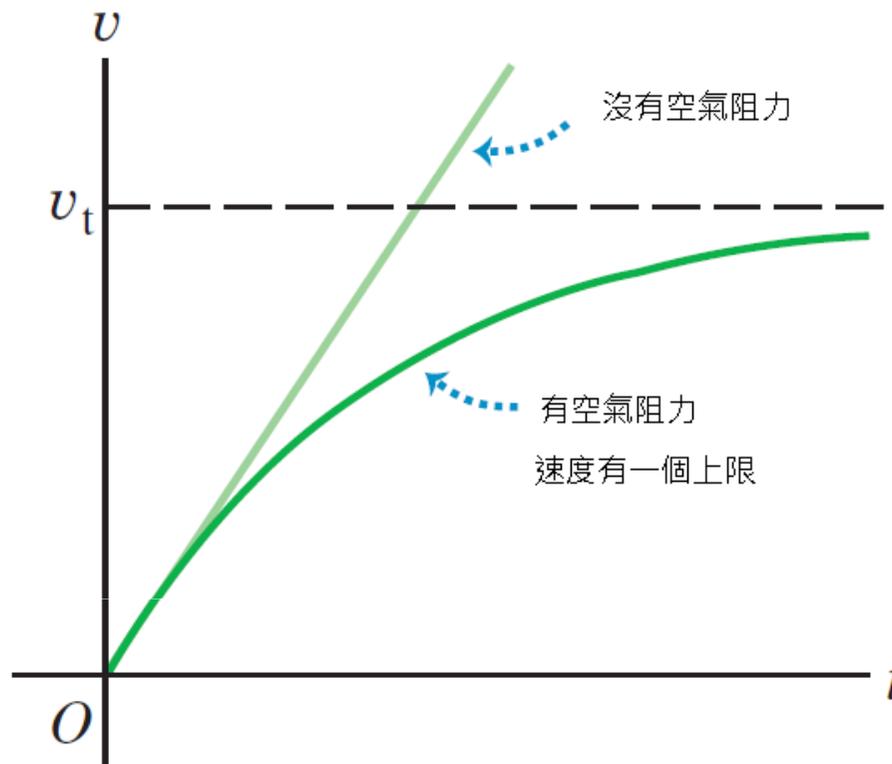


有空氣



抽真空

由於有空氣阻力，不同的物質未必能同時降落相同的高度，但是把空氣抽掉時，在真空中就同時落地。



跳傘者受到兩個作用力：

1. 重力
2. 空氣阻力

起初重力較大落體速度漸漸增大，隨著速度加大空氣阻力也隨之增大，最終空氣阻力與重力相等，合力為零，跳傘者將維持等速度運動，此速度稱為**終端速度**。

功與動能的概念與定義：

在一光滑平面上施一水平方向的力推動一物體，行進的距離愈大，物體的末速也會愈大；若固定物體的行進距離，則愈大的定力作用下，物體也可以得到愈大的末速度。同一物體的速度愈大，其動能也愈大，因此可以推斷**動能的改變與作用力及位移均有關**。人對物體作功，而所作的功轉換成物體的動能。一般說來，能量轉換過程中常常伴隨著作功。

考慮一個物體在光滑平面上受一定力**F**作用時，若物體受力的方向與其位移同方向，則施力對物體所作的功（**work**）定義為力**F**與位移**S**的乘積，以數學式表示為：

$$\text{動能}K\text{的定義： } K = \frac{1}{2}mv^2$$

$$W = \mathbf{F} \cdot \mathbf{S} = maS$$

$$= \frac{1}{2}m(2aS) = \frac{1}{2}m(v^2 - v_0^2)$$

$$= \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = \Delta K$$

定力**F**作用時，物體進行等加速度運動：

$$v^2 = v_0^2 + 2aS$$

$W = \Delta K \longrightarrow$ 功與動能原理

合力對物體所作的功 等於物體動能的變化量，稱為功能定理

功的定義：

功=作用力×物體沿力方向的位移

單位=焦耳

$$W = F \cdot S$$

熱能1卡=4.2焦耳

一個投手施力1000牛頓作用在一個原為靜止的0.15公斤的棒球，作用的距離為2公尺，做功W=2000焦耳。根據功能原理，球的末動能也是2000J。球的末速度為163m/s。

功能定理

$$W = \Delta K = \frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_i^2$$

動能

$$\frac{1}{2}mv^2$$

$$F = 1000N, S = 2m$$

$$W = F \cdot S = 1000 \times 2 = 2000J$$

$$W = \Delta K = K - K_0 = K = 2000J$$

$$\frac{1}{2}mv^2 = K = 2000 \rightarrow$$

$$v = \sqrt{2K/m} = \sqrt{\frac{2 \times 2000}{0.15}} = 163m/s$$

動能**K**是與物體的運動狀態相關的能量。物體移動得越快，其動能就越大。當物體是靜止的，其動能為零。對於速度**v**遠低於光速的質量為**m**的物體，動能**K**的定義：

$$K = \frac{1}{2}mv^2$$

例如，一隻**3.0**公斤鴨子以**2.0**米/秒的速度飛過我們，它的動能是**6.0 kg·m²/s²**；就是把這個數字和鴨子的運動的能量聯繫起來。國際單位的動能（和其他類型的能源）是焦耳（**J= kg·m²/s²**），以**19**世紀英國科學家焦耳（**Joule**）的名字命名。飛鴨具有**6.0J**的動能。

重力所做之功

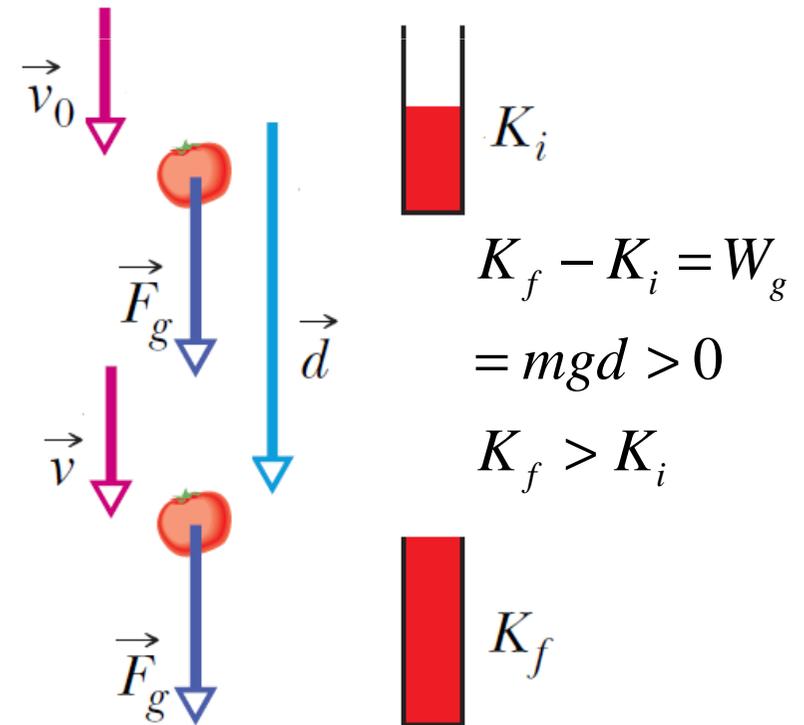
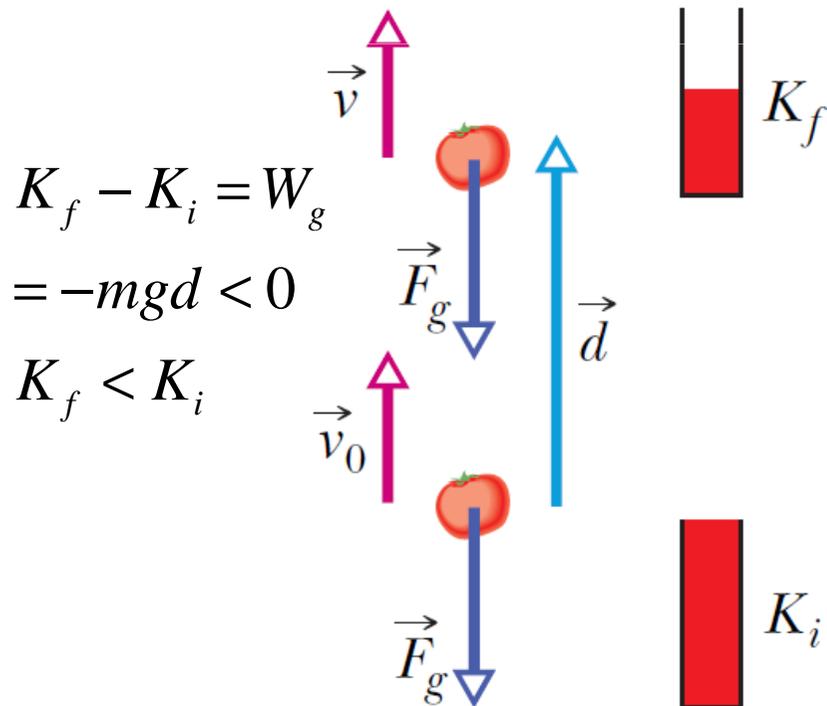
$W=mgd$

只有一個作用力: 功能原理

$$W = \Delta K = \frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_i^2$$

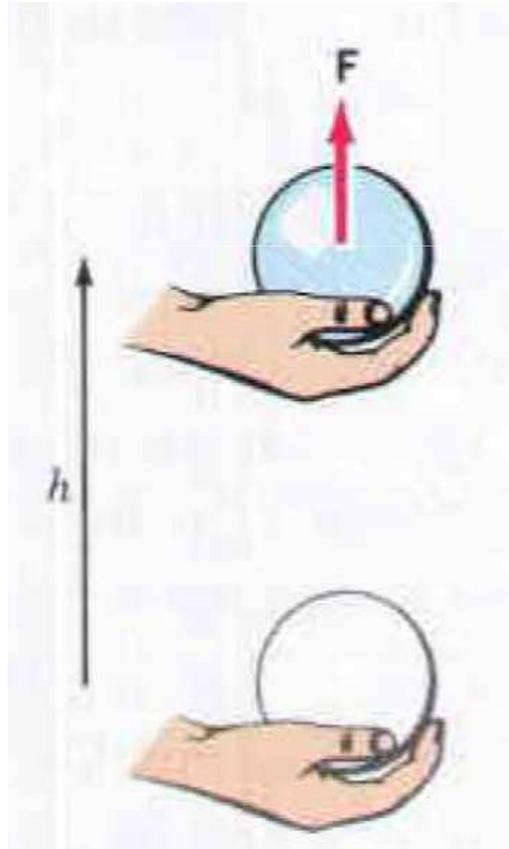
物體上升過程
重力作負功動能減少

物體下落過程
重力作正功動能增加

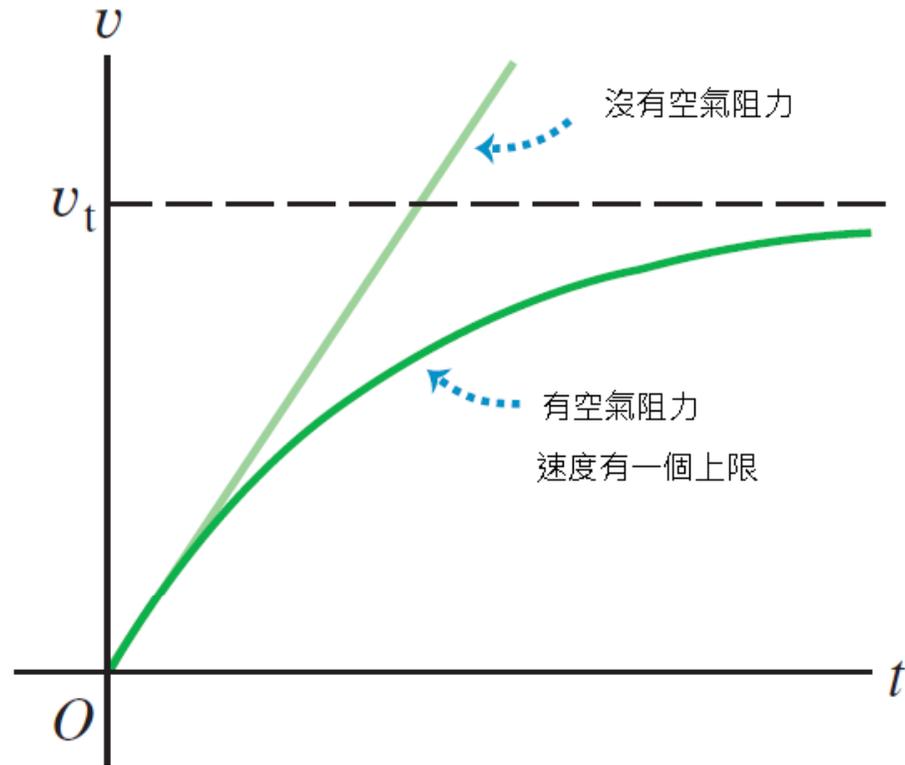
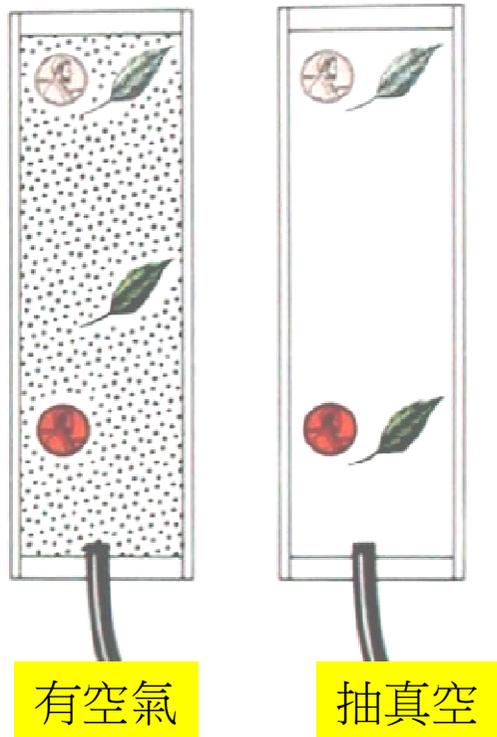


合力對物體所作的功 等於物體動能的變化量，稱為功能定理。如果合力作正功，則物體的速率會增加；如果合力作的是負功，則物體的速率會減少。若合力為零，淨功為零，物體的速度不改變，動能不改變。在下圖中，手施力將物體向上舉，作正功；重力向下，而物體向上位移，重力作負功，兩功大小相等，符號相反，因此淨功為零，動能的變化也是零。手施力作正功(W)沒轉成物體運動的能量，轉變成重力場中的**位能(U)**。 U 的大小由物理的質量 m ，重力加速度 g ，位移的高度 h 決定：

$$U=mgh$$



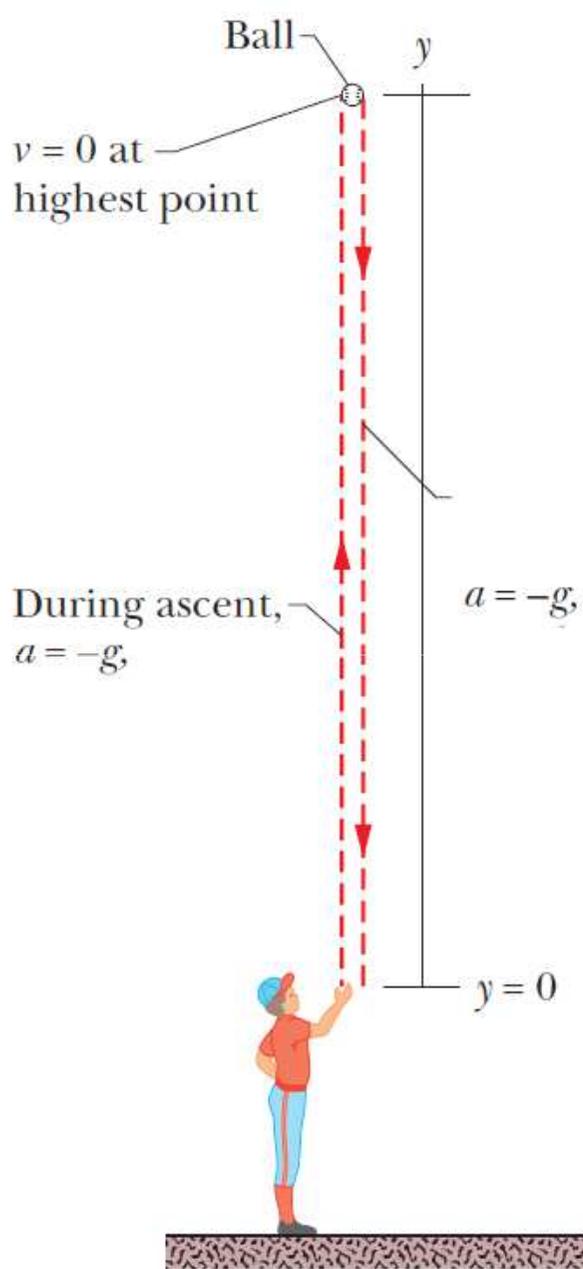
有兩個作用力：
1. 手的施力
2. 重力
兩個力量都做功



跳傘者受到兩個作用力：

1. 重力
2. 空氣阻力

起初重力較大落體速度漸漸增大，隨著速度加大空氣阻力也隨之增大，最終空氣阻力與重力相等，合力為零，跳傘者將維持等速度運動，此速度稱為**終端速度**。



將一物體自地面以鉛直方向向上拋出，可以見到物體的速率漸漸減小；當物體到達最高點時，其速率為零；當物體下落時，其速率逐漸變大，若忽略全程的空氣阻力，當它回到與拋出點相同高度時，具有的速率與物體最初的速率相等。由上一小節所介紹的動能概念，我們知道運動中的物體具有動能：物體上拋開始運動時具有動能，到達最高點時，動能消失為零，但是當物體下落後，動能逐漸變大，**如何以能量的觀點去描述物體鉛直上拋與下落？**我們引入另一種形式的能量，這種能量與物體所在的位置有關，稱為**位能**（potential energy）。位能是位置的函數 $U(y)$ ，

$$U(y) = mgy$$

力學能 $E = \text{動能}K + \text{位能}U = \text{守恆量}$

$$E_f = E_i$$

$$K_f + U_f = K_i + U_i$$

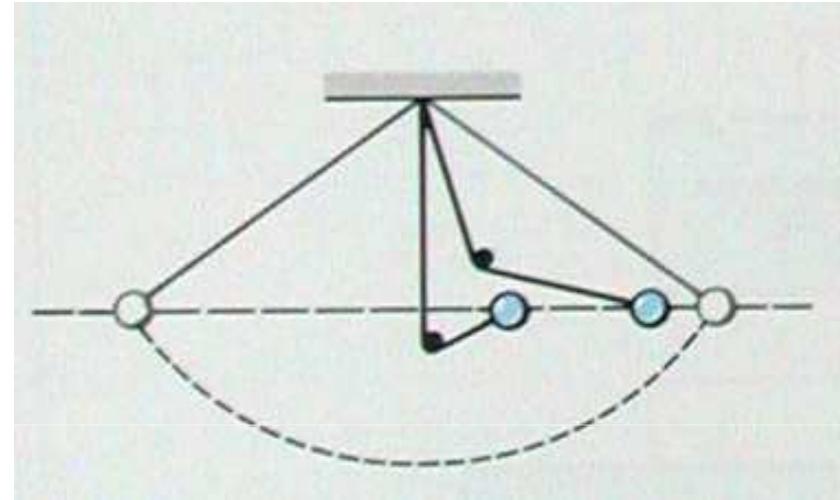
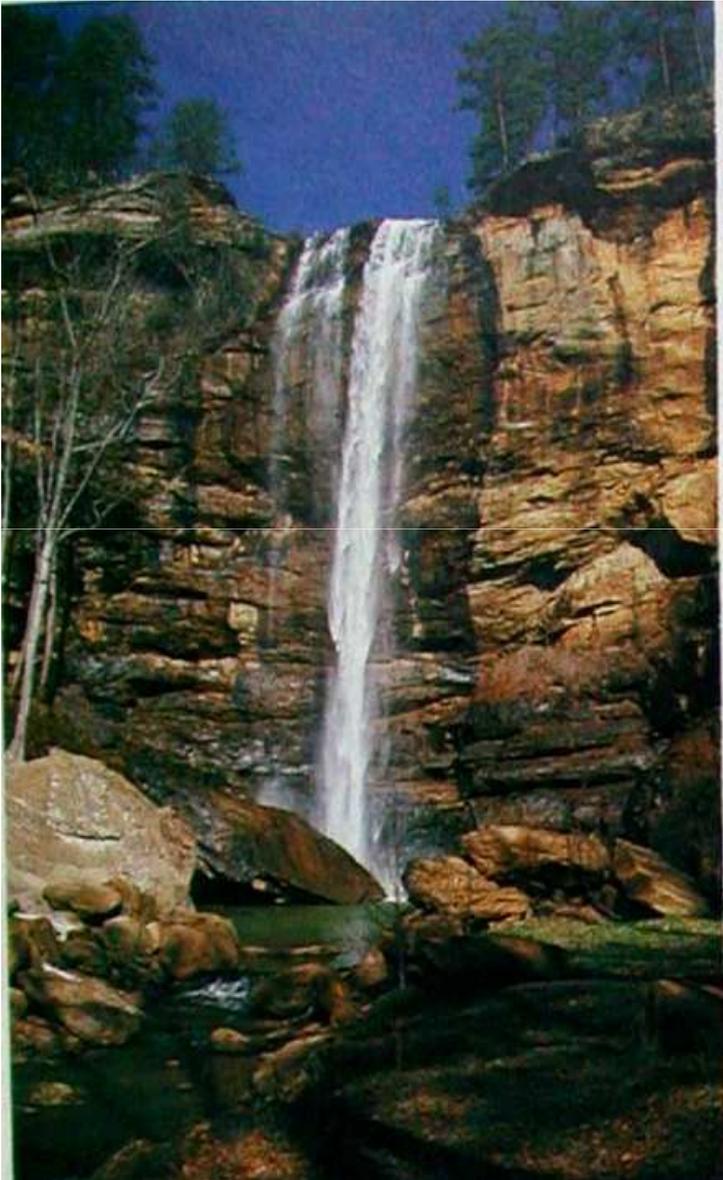
兩種能量合併計算就能實現美好的力學能守恆的概念。

位能 $U = mgh$



動能K

$$\frac{1}{2}mv^2$$



Conservation of Energy

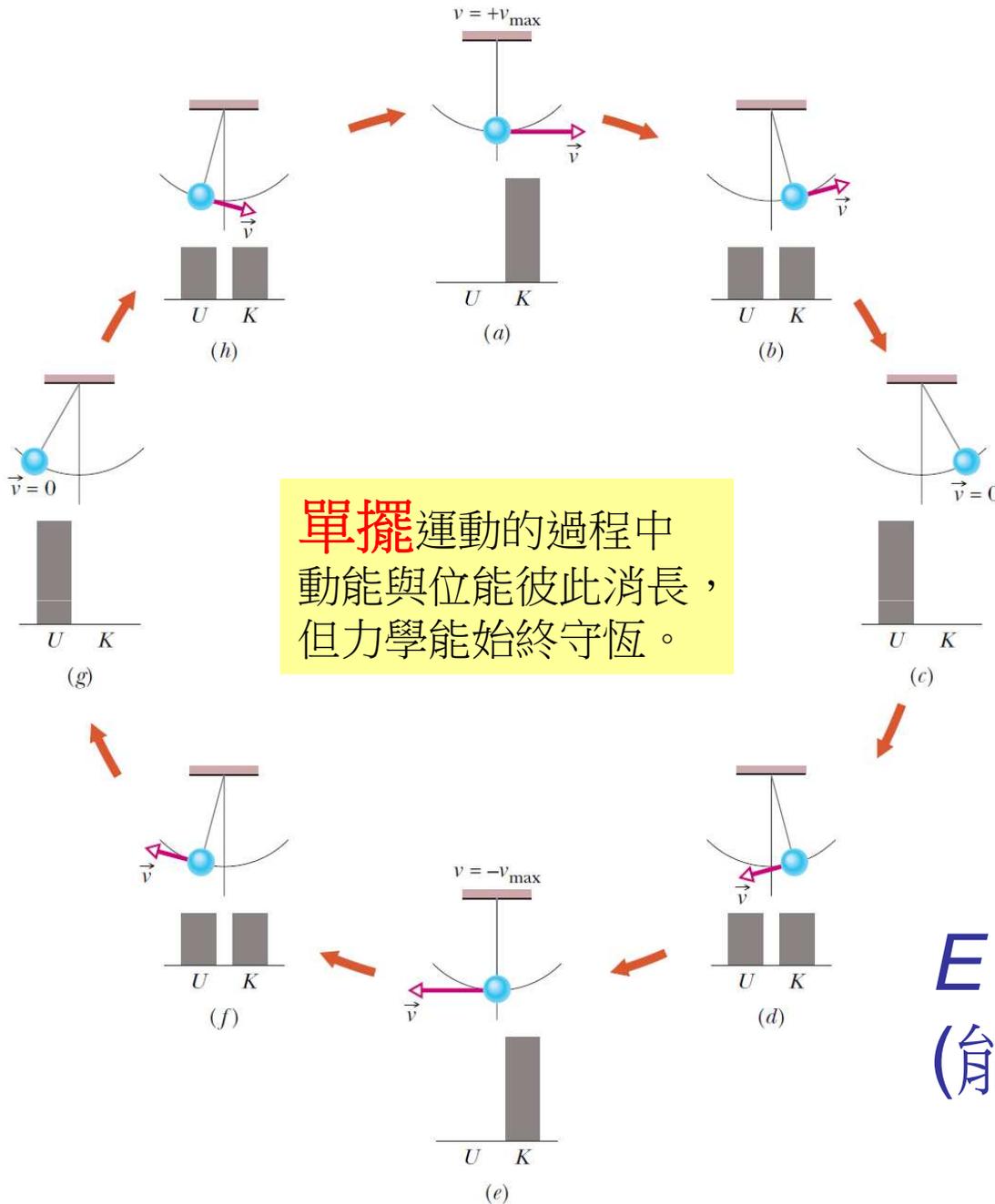
$$E = K + U = \text{constant}$$

(能量守恆)

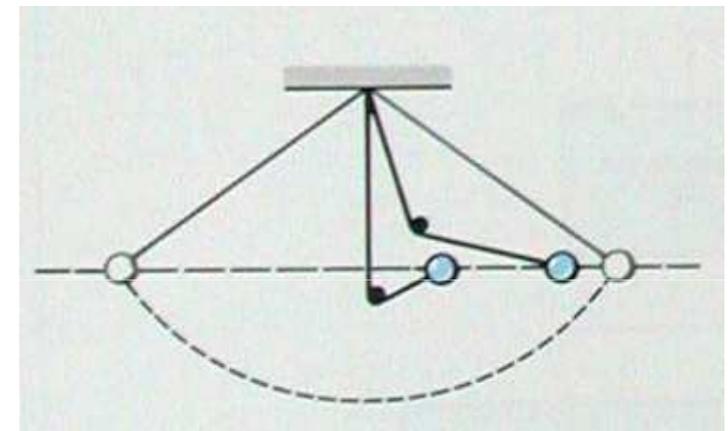
位能 ↔ 動能

$$U = mgh$$

$$K = \frac{1}{2}mv^2$$



單擺運動的過程中
動能與位能彼此消長，
但力學能始終守恆。



Conservation of Energy

$$E = K + U = \text{constant}$$

(能量守恆)

單位時間內所作的功稱為**功率**（power）。假設施力者在 Δt 的時間間隔內作了 ΔW 的功，則**平均功率** \bar{P} （average power）的定義如下：

$$\bar{P} = \frac{\Delta W}{\Delta t}$$

如果所取的時間間隔 Δt 極短（即 Δt 趨近於零），則可以將這一極短時間視為一瞬間，其間的平均功率就稱為**瞬時功率**，簡稱**功率**，以數學式表示為：

$$P = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta W}{\Delta t}$$

功率的 SI 單位為**焦耳／秒**（J/s），又稱為**瓦特**（watt），簡稱**瓦**（W），也就是 1 瓦特等於 1 焦耳／秒（1 W = 1 J/s）。一千瓦特的功率也常用**千瓦**（kW）表示之，1 kW = 1000 W。



功的定義：

功=作用力×物體沿力方向的位移

單位等於焦耳

1卡=4.2焦耳

$$P = iV$$

$$P = i^2R$$

$$P=i(2A) V(100V)=200W$$

力(force): 牛頓 (N)

功(work)：焦耳 (J)

功率(power)：瓦特 (W)

1度電=1千瓦小時

$$\begin{aligned} 1\text{kw} \cdot \text{hr} &= 1000(\text{W}) \times 3600(\text{s}) \\ &= 3.6 \times 10^6 \text{J} \end{aligned}$$

一個電動馬達的輸出功率為2000瓦特，利用這個馬達將800公斤的重物升高100公尺需花多少的時間？(秒) $g=10 \text{ m/(s}^2\text{)}$

$$\Delta t = \frac{W}{P} = \frac{mgh}{P} = \frac{800 \times 10 \times 100}{2000} = 400$$