

# 自然科學概論：物理單元(2)

## 圓周運動與天文學

- 圓周運動
- 克普勒的行星運動定律
- 牛頓重力定律
- 天文學與宇宙論

## 圓週運動的向心加速度與向心力

牛頓的運動學定律發現：物體在不受任何力量作用時，只有一個運動狀態，那就是等速率直線運動，簡稱等速度運動。運動的速率必須是均勻不變，運動的軌跡必須是直線。快慢不變並且在一條直線上運動，如果不是如此就一定受力。根據這個定律，任何圓週運動或週期性的軌道運動一定受力，而力量的大小與方向則由第二定律決定：(並且要特別注意這是向量形式)

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

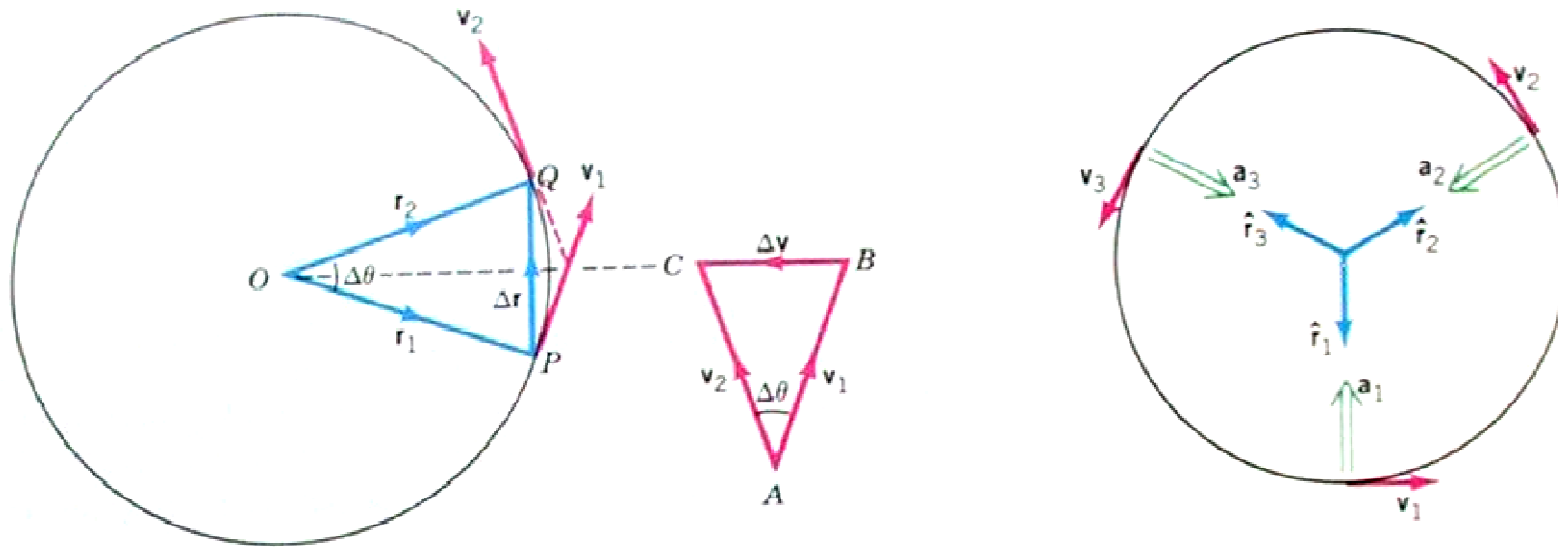
$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} \simeq \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$$

等速率圓周運動的質點雖然在圓周上每個位置的速率皆相同，但其運動方向

都是沿著各自的切線方向而有所不同， $\vec{v}$  速度向量的方向不同導致  $\Delta\vec{v} \neq 0$

也就有非零的加速度，稱為圓週運動的向心加速度，相應的力稱為向心力。

一個作等速率圓周運動的質點需要一個力量，使其可以改變方向而維持在原来的圓周運動不至於會脫離圓週，此力稱作向心力。



相似三角形對應邊成比例

$$\frac{|\Delta \mathbf{r}|}{r} = \frac{|\Delta \mathbf{v}|}{v}$$

質點以一個週期 $T$ 的時間繞行圓週長1週( $2\pi r$ )，因此其速度 $v$ 為

$$v = \frac{2\pi r}{T}$$

$$a = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{|\Delta \mathbf{v}|}{\Delta t}$$

$$a = \frac{v^2}{r} = \frac{4\pi^2 r}{T^2}$$

向心加速度

$$a_r = \frac{v^2}{r}$$

$$\mathbf{a}_r = -\frac{v^2}{r} \hat{\mathbf{r}}$$

向心力

$$F = ma_r = \frac{mv^2}{r}$$

一個半徑 1 公尺的輪子，每分鐘均勻地旋轉 120 圈，則輪子邊緣上任一點的加速度大小 為

$$a = \frac{4\pi^2 r}{T^2} = \frac{4\pi^2 \cdot 1}{(60/120)^2} = 16\pi^2 = 158(m/s^2)$$

當一顆大恆星變成超新星時，它的核心可能被壓縮得如此緊密，以至於它變成了一個半徑約20公里的中子星。如果一顆中子星每秒旋轉一周，（a）在中子星赤道上的粒子的旋轉速度是多少？（b）粒子的向心加速度的大小是多少？

$$v = \frac{2\pi r}{T} = \frac{2\pi \cdot 20000}{1} = 40000\pi = 126(km/s) = 126 \times 10^3(m/s)$$

$$a = \frac{v^2}{r} = \frac{(126 \times 10^3)^2}{20 \times 10^3} = 7.9 \times 10^5(m/s^2)$$

旋轉風扇每分鐘完成1200轉。考慮一個刀片的尖端，半徑為0.15m。(a) 尖端在一周轉動中移動了多少距離？(b) 尖端的速度和(c) 加速度的大小？(d) 轉動的周期是多少？



尖端在一周轉動中移動的距離=圓周長= $2\pi r$

$$2\pi r = 2 \times 3.14 \times 0.15 = 0.942m$$

$$\text{轉動的周期} = \frac{60}{1200} = 0.05s$$

$$\text{尖端的速度} = \frac{2\pi r}{T} = \frac{0.942}{0.05} = 18.85m/s$$

$$\text{加速度} = \frac{v^2}{r} = \frac{18.85^2}{0.15} = 2369m/s^2$$

一個質量為2公斤的球以恆定的速度在一個半徑為5米的圓上移動。圓周運動的周期為4秒。請計算這個運動所需的向心力=\_\_\_\_\_N

$$F_c = \frac{4\pi^2 mr}{T^2} = \frac{4 \times (3.14)^2 \times 2 \times 5}{4^2} = 24.7N$$

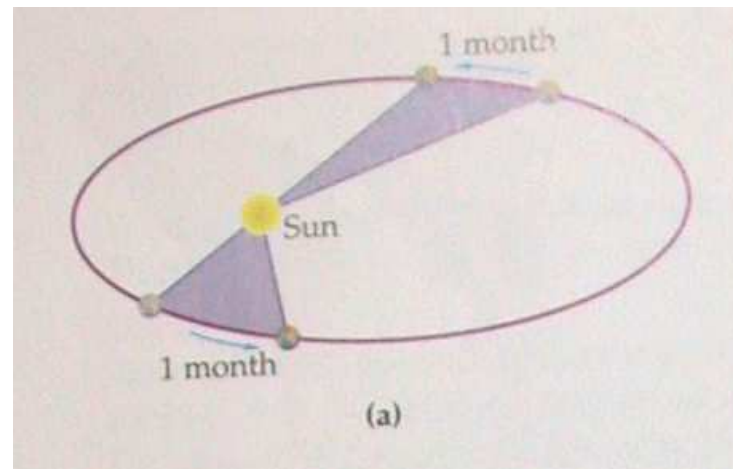
## 克普勒(Kepler)行星運動定律

1. 行星繞日的軌道是橢圓形
2. 等面積定律:行星至太陽間的連心線在相同的時間內掃過相同的面積
3. 行星繞日的週期(T)與其橢圓軌道之半長軸(R)關係為

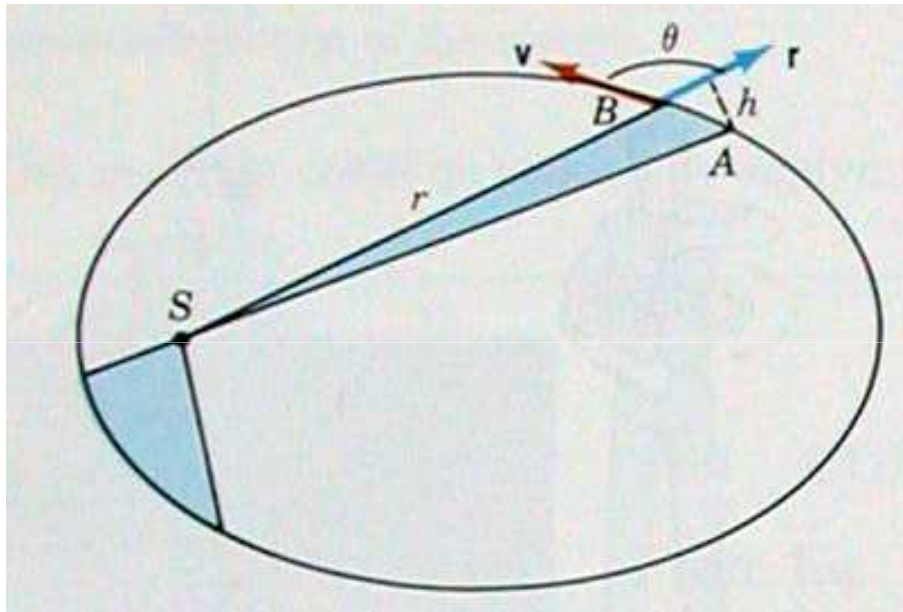
$$T^2 \propto R^3$$



Johannes Kepler (1571–1630).



等面積定律 = 行星掃過面積的速率( $\frac{\Delta A}{\Delta t}$ )為一定值，與軌道的位置無關。



$$\frac{\Delta A}{\Delta t} = \text{常數} \quad \Delta A = \frac{1}{2} r^2 \theta$$

$$v = \frac{r \theta}{\Delta t} \rightarrow \frac{\Delta A}{\Delta t} = \frac{\frac{1}{2} r^2 \theta}{\Delta t} = \frac{1}{2} r v = \text{常數}$$

$$L = mvr = \text{常數} \Rightarrow \text{角動量守恆}$$

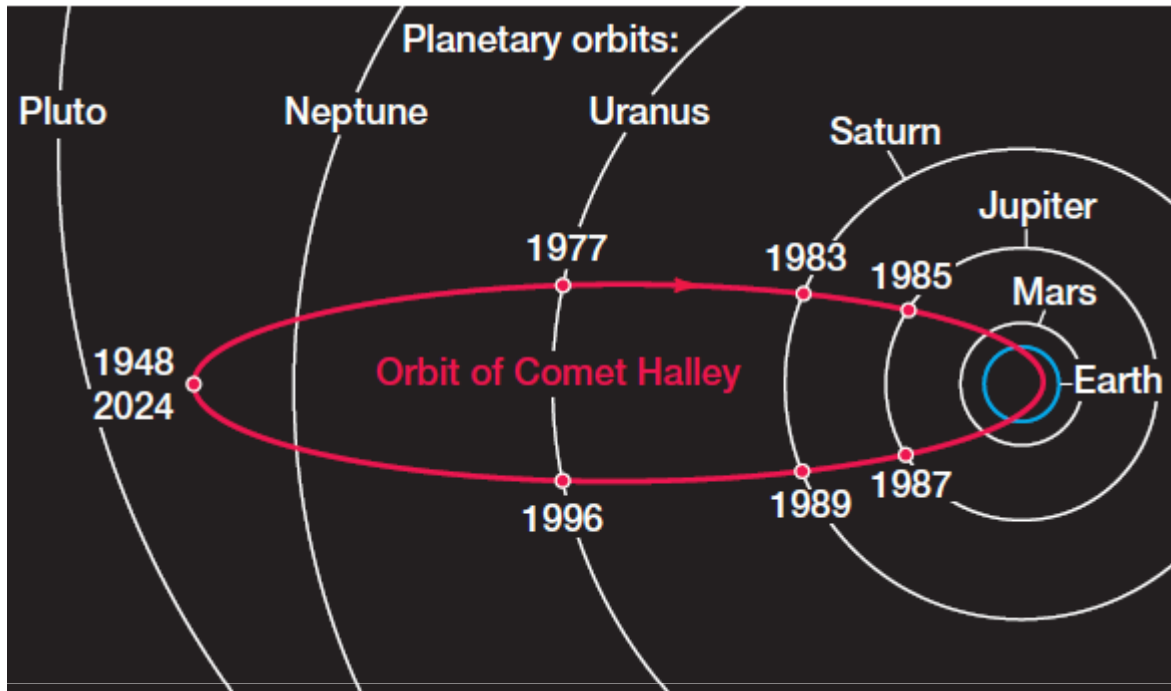
根據克卜勒的行星運動第二定律，等面積定律：在相同的時間之內，行星到太陽之間的連心線會掃過相同的面積，因此在近日點附近，由於連心線的距離較短，要掃出相同的面積必然會有比較長的弧長，因此在相同的時間之內，行星要運動過較長的弧長，表示在這段時間內運行的速度較快，也就是行星在軌道運動時，在近日點附近運動的速度較快。



# 太陽系的行星數據

	與太陽距離 (百萬公里)	赤道半徑 (公里)	體積 (地球=1)	重量 (地球=1)	密度 (g/cm <sup>3</sup> )	赤道重力 (m/s <sup>2</sup> )	自轉週期 (日)	公轉週期	軌道 離心率	
水星	57.909175	2439	0.054	0.055	5.42	3.7	58.646	88日	0.20	
金星	108.20893	6051	0.88	0.815	5.24	8.87	243	225日	0.0068	
地球	149.59789	6378	1	1	5.51	9.766	0.997	365日	0.0167	
火星	227.93664	3397	0.150	0.107	3.94	3.693	1.0260	687日	0.0934	
木星	778.41202	71492	1316	317.8	1.33	20.87	0.4135	11.86年	0.0484	
土星	1426.7254	60268	763.6	95.16	0.70	10.4	0.4440	29.45年	0.0542	
天王星	2870.9722	25559	63.1	14.37	1.30	8.43	0.718	84.02年	0.0472	
海王星	4498.2529	24764	57.7	17.14	1.76	10.71	0.6712	164.8年	0.0086	
冥王星	5906.38	1151	0.0059	0.002	2.00	0.81	6.387	248年	0.2488	-233

$$g = \frac{GM}{R^2}$$



Q:哈雷彗星繞日為何種軌道？

A:橢圓曲線

行星運動時，在近日點的速度較快；在遠日點的速度較慢。



1986哈雷彗星的近照。

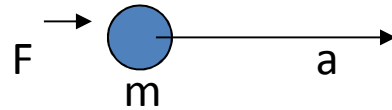
克卜勒行星運動第三定律：行星繞太陽一周所需的時間 $T$ (週期)和行星軌道的半長軸 $r$ (距離)，滿足 $r^3/T^2$ 為定值，與個別行星無關。

PLANET	SEMIMAJOR AXIS $a$ ( $10^{10}$ m)	PERIOD $T$ (y)	$T^2/a^3$ ( $10^{-34}$ y <sup>2</sup> /m <sup>3</sup> )
Mercury	5.79	0.241	2.99
Venus	10.8	0.615	3.00
Earth	15.0	1.00	2.96
Mars	22.8	1.88	2.98
Jupiter	77.8	11.9	3.01
Saturn	143	29.5	2.98
Uranus	287	84.0	2.98
Neptune	450	165	2.99
Pluto	590	248	2.99

# 牛頓對科學的偉大貢獻

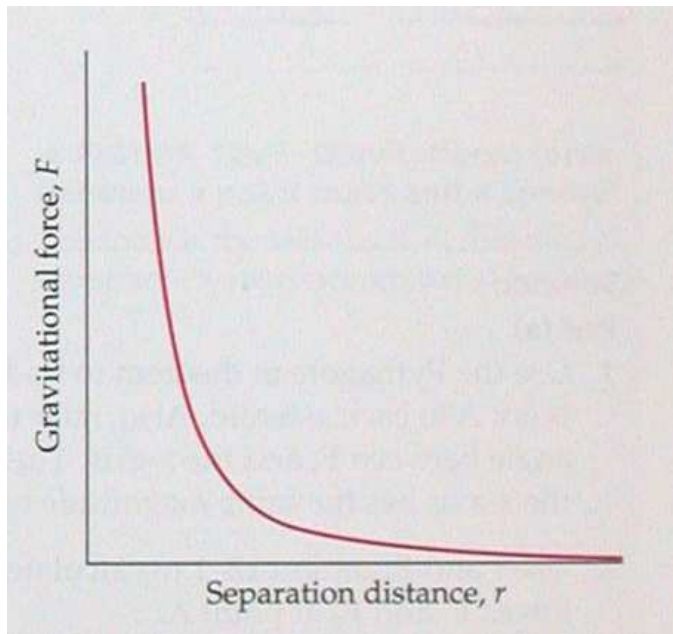
## 三大運動定律

$$F=ma$$



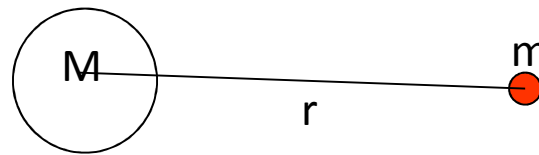
## 重力定律

$$F = -\frac{GMm}{r^2} \hat{r}$$



## 宇宙中的四個基本作用力

在我們的大自然中有四個基本的交互作用，所謂基本的交互作用就是自然存在於物質間的交互作用。**1.質量與質量之間存在重力**，**2.電荷與電荷之間存在電力**，在原子核內存在**3.強交互作用力**和**4.弱交互作用力**。強交互作用力將夸克束縛在質子和中子的內部，也形成了質子與中子在原子核內部結合的力量，弱交互作用力促使巨大的原子核發生蛻變的現象。在星際間的物質就是藉著物質間的彼此的質量所形成的重力，相互靠近最後形成星球系統。



$$G = 6.67 \times 10^{-11} \text{ N}\cdot\text{m}^2/\text{kg}^2$$

牛頓的重力定律有甚麼根據呢?為什麼(1) $F$ 與距離 $r$ 的平方反比?(2) $F$ 與質量 $m$ 成正比?(3)力量的方向在連心線上?

圓周運動需要  
向心力

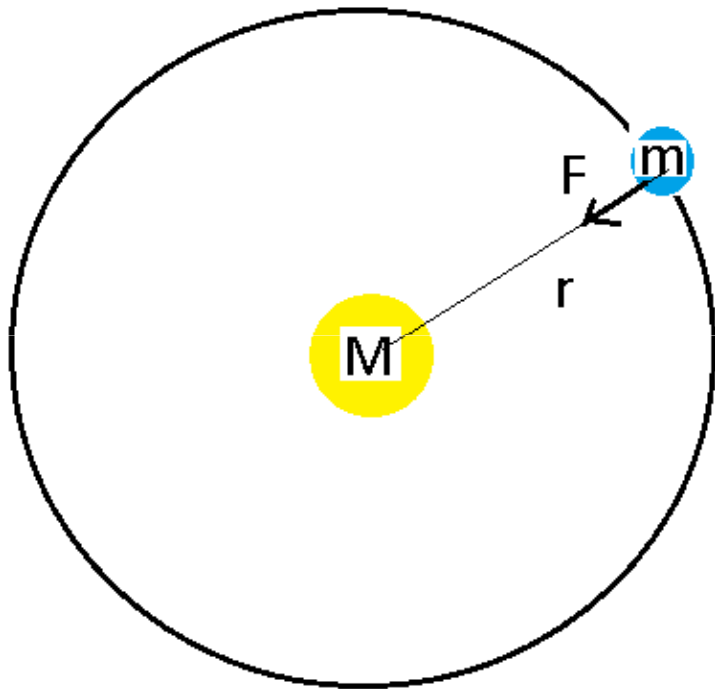
$$F = ma_r = \frac{mv^2}{r} = \frac{4\pi^2 mr}{T^2}$$

重力就提供了  
圓周運動所需  
的向心力

||

$$v = \frac{2\pi r}{T}$$

$$F = \frac{GMm}{r^2}$$



$$F = \frac{4\pi^2 mr}{T^2} = \frac{GMm}{r^2}$$

$$\frac{r^3}{T^2} = \frac{GM}{4\pi^2}$$

牛頓成功的推導出克卜勒行星運動第三定律：行星繞太陽一周所需的時間 $T$ (週期)和行星軌道的半長軸 $r$ (距離)，滿足 $r^3/T^2$ 為定值，與個別行星無關。

伽利略的自由落體運動發現地球表面上所有的物體都以相同的加速度向下墜落，其數值是9.8。這個結果與物體的質量無關，與物體的材料無關，與在地球上哪一個地點進行自由落體運動也沒有關係，這樣一個普遍存在的法則意味著9.8這個數值絕對有很深的意義，可惜伽利略不能夠找到這個問題的答案。

自由落體運動  
是等加速度運  
動， $g=9.8$

牛頓是古典力學集大成的科學家，用他所發現的萬有引力定律可以解釋重力加速度9.8的來源。考慮地表面上的任何物體質量為 $m$ 與地球的質量 $M$ 之間的吸引力其大小為 $F$ ，而自由落體運動的物體要滿足的力量與加速度之間的關係為牛頓第二運動定律： $F=ma$ ,  $a=g$ ,  $F=mg$

$$F = \frac{GMm}{r^2} = \frac{GM_E}{R_E^2} m = mg$$

$$g = \frac{GM_E}{R_E^2}$$

$$5.98 \times 10^{24} \text{ kg}$$

$$6.37 \times 10^6 \text{ m}$$

原來地球的重力加速度其實就是地球的一個標籤，9.8這個數字完全由地球的質量和地球的半徑所決定，利用這個公式我們可以由測量行星的質量和半徑來決定該行星表面的重力加速度，這對類登陸火星而言是一個非常重要的理論依據。



利用  $g = \frac{GM}{R^2}$  這個公式我們可以由測量行星的質量和半徑 來決

定該行星表面的重力加速度。在下面的表格中我們列出太陽系各行星的半徑，質量和測量到的重力加速度，並且與公式的預測做比較。

地球的質量= $5.98 \times 10^{24}$  kg

地球的半徑= $6.37 \times 10^6$  m

	質量	赤道半徑	赤道重力加速度	加速度公式	誤差百分比
水星	0.06	0.38	3.70	3.67	0.73
金星	0.82	0.95	8.87	8.84	0.31
地球	1	1	9.77	9.77	0.00
火星	0.11	0.53	3.69	3.68	0.25
木星	317.80	11.21	20.87	24.70	15.51
土星	95.16	9.45	10.40	10.41	0.08
天王星	14.37	4.01	8.43	8.74	3.53
海王星	17.14	3.88	10.71	11.10	3.54
冥王星	0.00	0.18	0.81	0.60	35.06

$$g = \frac{GM_E}{R_E^2}$$



## 地球的重力加速度與高度之關係

離地球的表面越遠，距離越遠，分母的r越大，那麼重力加速度的大小就會隨著距離的平方成反比而減小。但是地球的重力加速度，在地球內部變化情況又是如何呢？

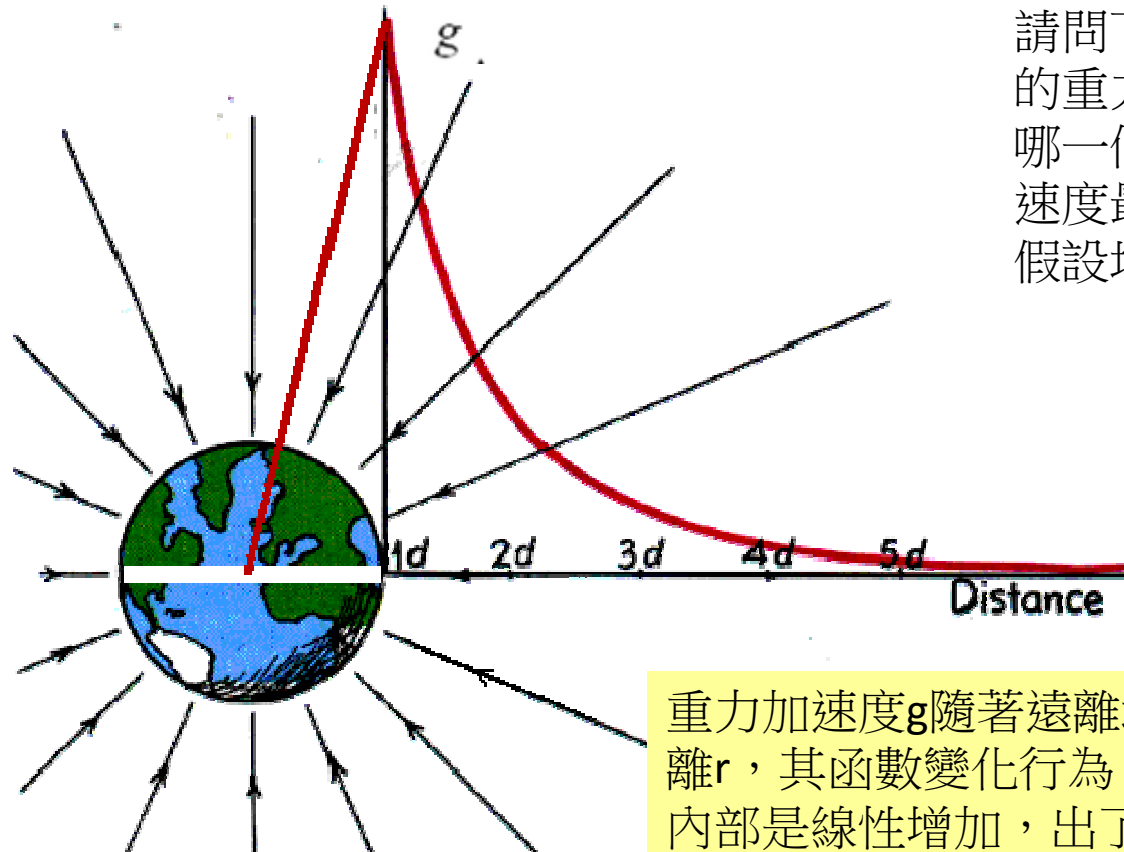
$$F = \frac{GMm}{r^2} = mg$$

$$g = \frac{GM}{r^2}$$

高度(km)	重力加速度(m/s <sup>2</sup> )	高度實例
0	9.83	地平面
8.8	9.80	聖母峰
36.6	9.71	輕汽球
400	8.70	太空梭
35700	0.225	通訊衛星

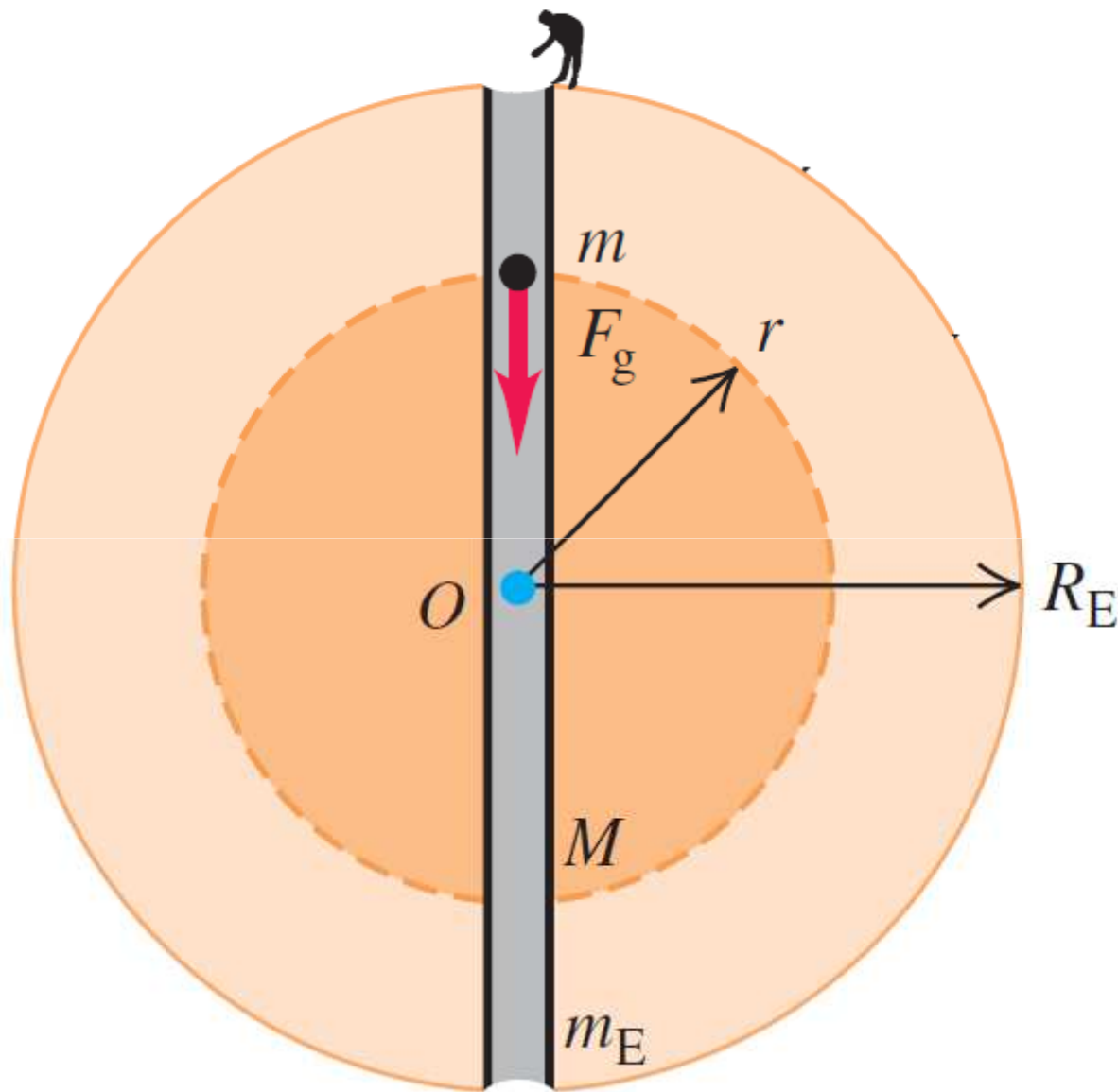


但是地球的重力加速度，在地球內部變化情況又是如何呢？我們會發現，在地心的時候重力加速度是0，也就是在地心任何物體都在失重的狀態。整個重力加速度 $g$ 隨著離開地心的距離 $r$ ，其大小變化情況如下圖所示：



請問下列哪一個地點的重力加速度最小？  
哪一個地點的重力加速度最大？  
假設地球的半徑為 $R$ 。

重力加速度 $g$ 隨著遠離地心的距離 $r$ ，其函數變化行為：在地球內部是線性增加，出了地表之後就是平方反比定律。



由於地球內部的重力隨著距離的變化是線性關係，並且力量的方向總是向著地心，因此這個力量可以形成一個簡諧運動所需要的恢復力。如果我們將地球打一個隧道，從隧道口丟下一個物體它將會來回於地表兩端之間，在隧道內進行簡諧震盪。

由於受到一個星體的質量所造成的重力吸引，任何物體要從星體的表面脫離，都需要一個足夠大的初速度才能夠逃脫這個星體的重力場。逃脫需要達到的最小速度稱為**脫離速度**。脫離速度的大小也是由這個星體的質量和星體的半徑所決定。或是由星體的密度和半徑所決定。

$$V_E = \sqrt{\frac{2GM}{R}} = \sqrt{\frac{8\pi G\rho}{3}}R$$

$$M = \rho V = \rho\left(\frac{4}{3}\pi R^3\right)$$

天體	質量(kg)	半徑(m)	脫離速度(km/s)
小行星	$1.17 \times 10^{21}$	$3.8 \times 10^5$	0.64
月球	$7.36 \times 10^{22}$	$1.74 \times 10^6$	2.38
地球	$5.98 \times 10^{24}$	$6.37 \times 10^6$	11.2
木星	$1.90 \times 10^{27}$	$7.15 \times 10^7$	59.5
太陽	$1.99 \times 10^{30}$	$6.96 \times 10^8$	618(=1/500 C)
天狼B星(白矮星)	$2 \times 10^{30}$	$1 \times 10^7$	5200
中子星	$2 \times 10^{30}$	$1 \times 10^4$	$2 \times 10^5 = 2/3 C$

光速=  $3 \times 10^5$  km/s

**Q：太陽的光和熱是如何而來？**

**A：利用核融合反應把氫融合成氦並釋放出巨大的能量**

當兩個氫原子以非常高的速度彼此靠近，當兩原子核接觸時會發生融合的現象，融合後得到氦原子。氦原子的質量比碰撞前兩個氫原子的質量還小，失去的質量轉換成為能量，其中運用到的公式就是愛因斯坦在狹義相對論，著名的質能互換公式， $E=mc^2$ 。

**Q:我們骨骼中的鈣、呼吸的氧是從何而來？**

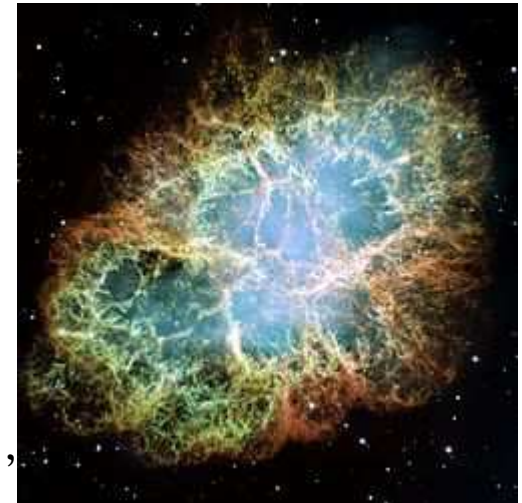
**A:恆星內部的核融合反應**

在氫原子融合完之後，恆星內部持續進行核融合反應，融合出更多高原子序的原子，我們呼吸的氧和骨骼中的鈣原子，都是在恆星內部的核融合反應所造就出來。而巨大質量的恆星，在恆星的晚年當核融合反應即將熄火的時候，會發生超新星爆炸。這些高原子序的原子在超新星爆炸的過程當中，又重新的被拋射到外太空，經過長久的歲月之後這些原子又藉由重力重新凝聚，最後才又再形成新一代的恆星系統。前一代恆星所融合的高原子序的原子就已經存在於新一代的恆星系統之中，我們的太陽系就是這樣一個典型的例子。我們能在地球上呼吸，生活所需要的所有物資，都是在前一代的巨大恆星的何心中為我們融合，並且經由超新星爆炸之後才能夠為我們所用。所以我們都是超新星的子民。

恆星結束融合反應之後，將膨脹成為一顆紅巨星。如果紅巨星沒有足夠的質量產生能夠讓碳燃燒的更高溫度，碳和氧就會在核心堆積起來。在散發出外面數層的氣體成為行星狀星雲之後，留下來的只有核心的部份，這個殘骸最終將成為**白矮星**。白矮星的密度極高，一顆質量與太陽相當的白矮星體積只有地球一般的大小。夜空中最明亮的恆星，天狼星也有一顆伴星，稱為天狼星**B星**(或小狼)，被發現是一顆白矮星。我們的太陽**50億**年後，也將變為一個白矮星。

**中子星**是巨大恆星演化到末期，經由重力坍縮發生超新星爆炸之後，可能成為的少數終點之一。恆星在核心的氫、氦、碳等元素於核融合反應中耗盡，當它們最終轉變成鐵元素時便無法從核融合中獲得能量。失去熱輻射壓力支撐的外圍物質受重力牽引會急速向核心墜落，有可能導致**外殼**的動能轉化為熱能向外爆發產生超新星爆炸，或者根據恆星質量的不同，**恆星的內部**區域被壓縮成白矮星、中子星或黑洞。白矮星被壓縮成中子星的過程中恆星遭受劇烈的壓縮使其組成物質中的電子併入質子轉化成中子，直徑大約只有十餘公里，且旋轉速度極快。由於其磁軸和自轉軸並不重合，磁場旋轉時所產生的無線電波等各種輻射可能會以一明一滅的方式傳到地球，有如人眨眼，此時稱作**脈衝星**。一顆典型的中子星質量介於太陽質量的**1.35到2.1倍**，半徑則在**10至20公里**之間。1969年，在1054年超新星爆發的殘骸蟹狀星雲中，發現了一顆無線電脈衝星（中子星），證明了脈衝星、中子星和超新星之間的關係。

中子星的脫離速度約為光速的2/3



What happen if  $V_E = C$  ?

Black Hole

以下內容為補充教材：

期末考試不考

## 16世紀的科學革命

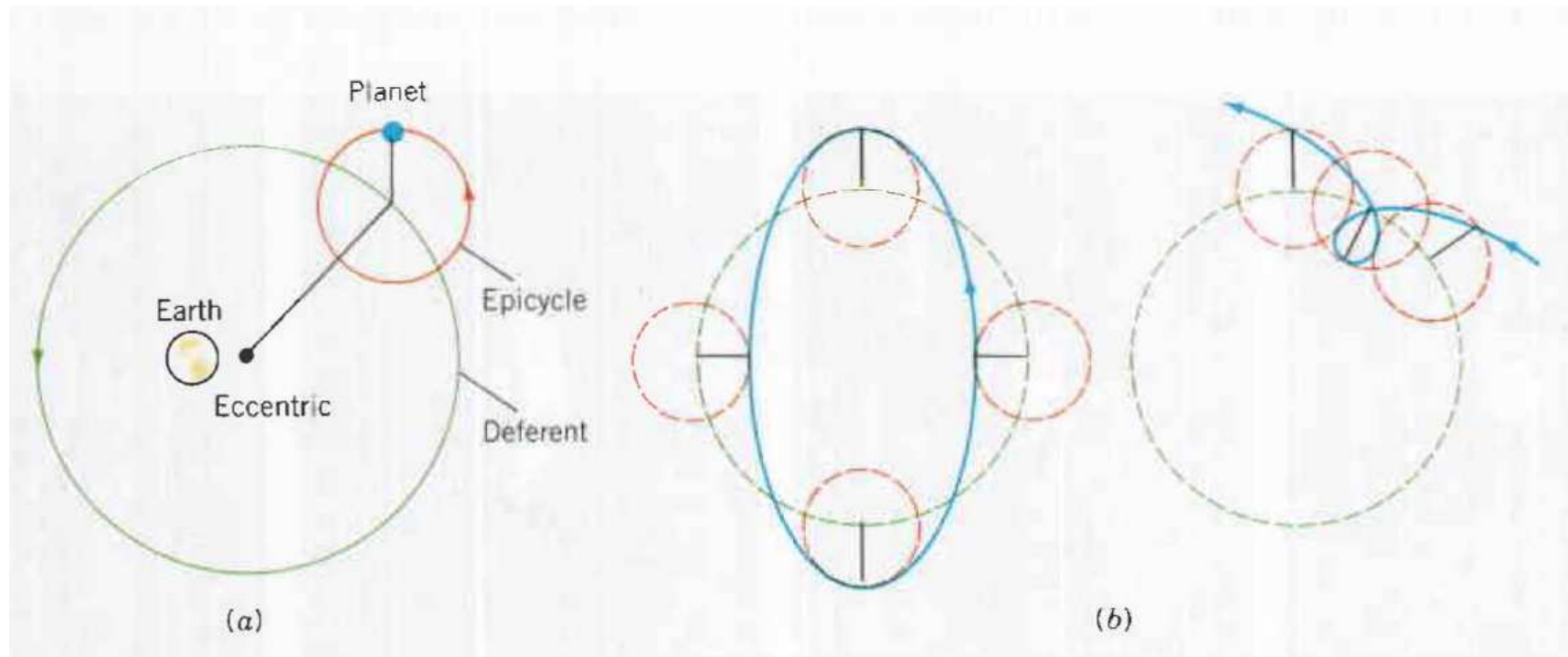
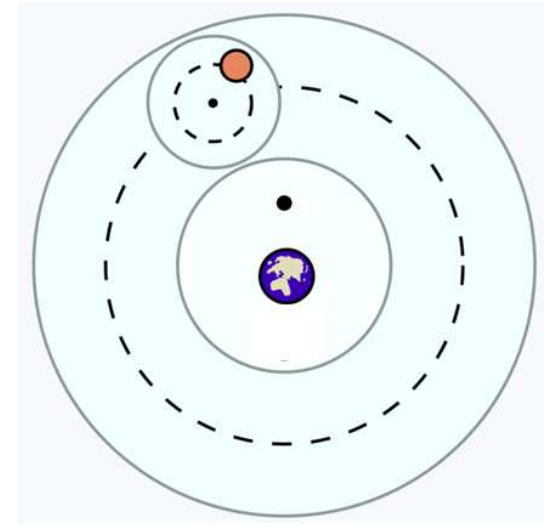
我們今天所知道的物理學的起源可以追溯到地球在宇宙中的兩種觀點的對抗。地心說認為地球處於宇宙的中心，太陽，行星和星星圍繞它旋轉。日心說認為地球和行星圍繞太陽運行。在這個偉大的辯論中，雙方的倡導者提出巧妙的論點，加深了我們對自然及其機制的理解。

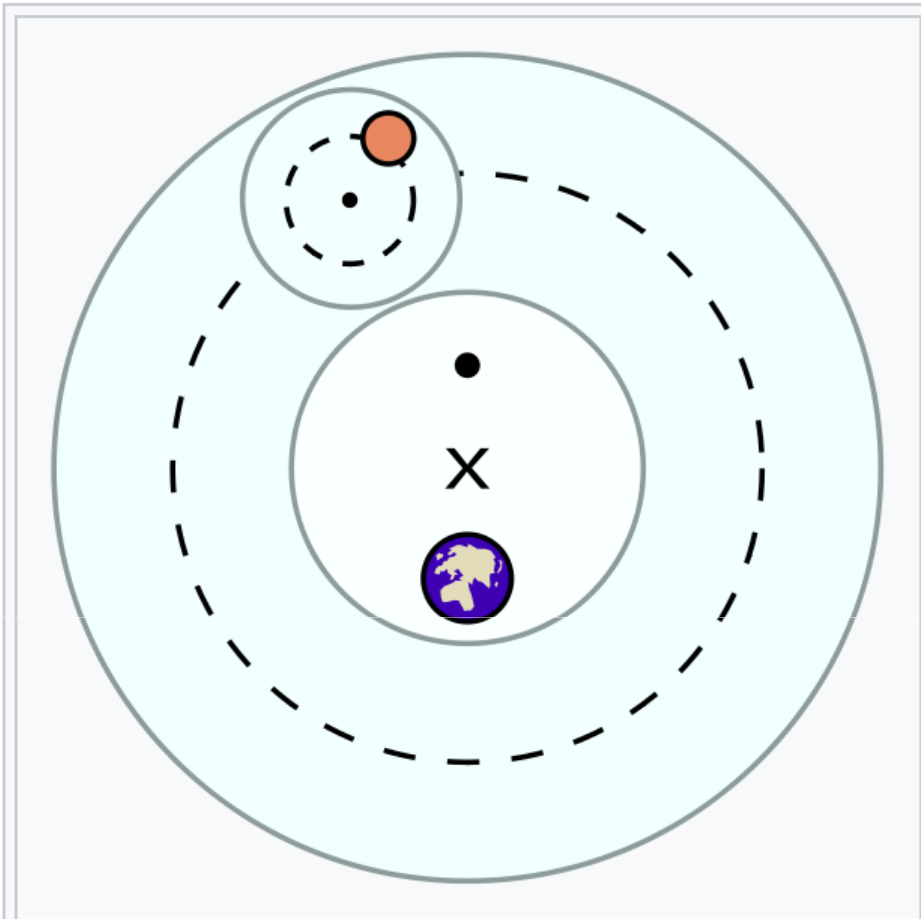
希臘哲學家柏拉圖（ca 400 B.C）主張地心說。他相信天體（星星和行星）是“完美的”。對他來說，這意味著他們的自然運動必須是一圈一圈（穩定）的運動。然而，行星有時似乎暫時扭轉了它們的運動，顯然，單一的勻速圓周運動不能解釋這種逆行。柏拉圖還認為，我們的感官並不能感知到“真實”的世界，所以只有通過推理才能獲得真理。亞里士多德從根本上不同意柏拉圖的觀點。他覺得，通過觀察自然而不是純粹的推理，人們可以獲得對世界的認識。

阿里斯塔克（Aristarchus）（約公元前310年）提出了一個日心說，把地球正確地定位為太陽的第三顆行星。由於地球得繞日軌道運動應該導致在軌道過程中恆星的明顯位置改變，但是這種所謂的恆星視差並沒有被看到。



為了解釋一些行星表面亮度，速度和大小的變化，希帕克斯（**Hipparchus**，約公元前**150**年）發明了一種新的均勻圓周運動系統，它們並不全是與地球同心的。如圖**a**所示，一顆行星的路徑是由均輪與本輪運動軌跡疊加而成的。不同的旋轉速度可以產生不同的路徑，如圖**b**所示。為了改善與觀察的一致性，托勒密（**ca A.D. 130**）增加了其他改進。例如，他把傳播的中心從地球轉移到另一個叫做偏心的地方。托勒密系統被天文學家使用了許多個世紀。





托勒密天文學的基本元素，顯示一顆行星在本輪上（小的虛線圓）、一個均輪（大的虛線圓）、偏心（X）和等徑（大的黑點）。

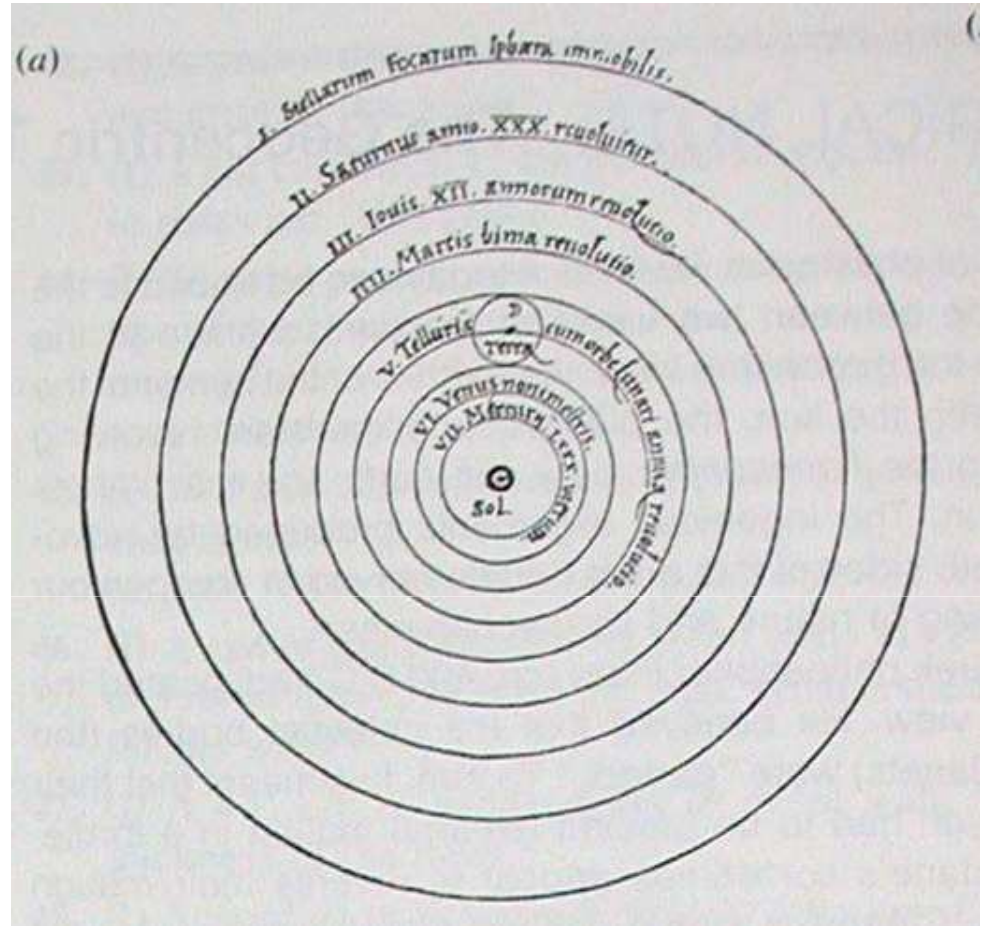
地心說的托勒密系統(A.D. 130)：行星被假定在一個被稱為本輪(epicycle)的小圓圈內運動，它繞著一個被稱為均輪(deferent)的大圓。這兩個圓都在大致平行於太陽的軌道平面（黃道）上以順時針方向運動。儘管這個系統被認為是以地球為中心的地心說，但地球不在行星運動的中心，而是偏向一側，稱為離心。

# THE COPERNICAN REVOLUTION



Nicholas Copernicus

(1473–1543).



## Heliocentric Theory

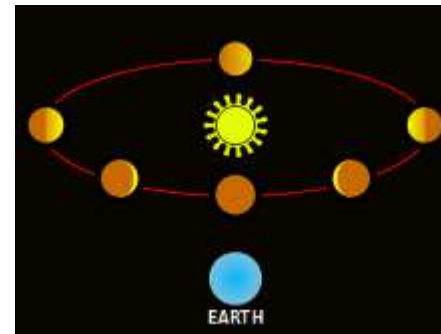
published in 1543,

## 哥白尼革命

哥白尼於**1496**年離開了他的本國波蘭，在意大利文藝復興的光芒中沐浴。他覺得用本輪與均輪的托勒密系統，在直觀上並不自然。他覺得，阿里斯塔克（**Aristarchus**）以太陽為中心的體系在概念上比較簡單。哥白尼很清楚地看出，太陽在地球周圍的圓周運動可以用地球每天的自轉運動來解釋。他仍然堅持柏拉圖統一的圓周運動規則，他發明了日心說，就在他死前**1543**年出版。

哥白尼的日心說可以很容易地解釋，行星的逆行運動、行星亮度和行星大小的明顯變化。但是為了與觀察結果達成一致，他被迫使用了本輪與均輪的工具。人們也意識到，如果哥白尼的模型是正確的，那麼金星應該顯示出**相位**：它的外觀應該從新月到全圓，就像我們觀察月球看到的那樣新月、半月和滿月。金星的這些相位在沒有望遠鏡的情況下是無法觀察到的。哥白尼體系的最終形式既不像托勒密體系那麼簡單，也不準確。哥白尼的日心說雖然能夠成功的解釋行星逆行運動的現象但是這個優點卻完全被其他的缺點(恆星視差和金星階段明顯不存在的)所掩蓋了。儘管如此，哥白尼已經證明，日心系統也可以用來預測行星的位置。

70年後，伽利略在**1610**年**9**月通過觀測發現金星所呈現的所有相位與月球十分相似。

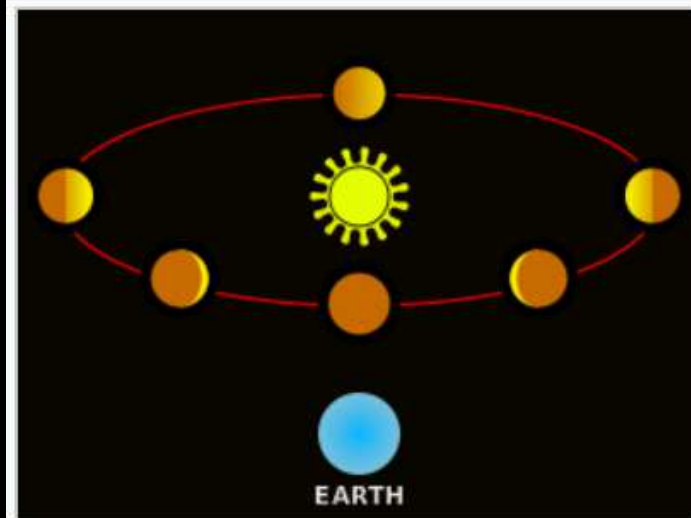




人們並不急於接受日心說並不足為奇，因為地球移動的說法是違背日常經驗的：

- 地球在大氣層中轉動時，人們並沒有感受到強風。哥白尼回應說，地球拖曳著大氣而行。
- 他正確地解釋了恆星視差的缺失，指出恆星離觀測者的距離太遠而無法察覺，但當時這不是一個令人信服的論據。
- 對地球移動這個觀點的另一個重要反對意見是基於這樣一個事實：即一個垂直上拋的石頭必然落回到射出點。人們直覺地認為如果地球在運動的話，應該掉落在後方。哥白尼無法回應這種反對觀點。

哥白尼之後，兩位科學巨人繼承了日心說，並發揚光大：伽利略與克卜勒。



金星在軌道上的位置相對於地球的圖。

哥白尼發表日心說後  
70年，伽利略在1610  
年9月通過觀測發現金  
星所呈現的所有相位  
與月球十分相似。

1609年，克卜勒出版《新天文學》，提出行星繞太陽運行的橢圓律：行星繞日的軌道是橢圓，太陽位居橢圓的一個焦點；以及面積律：行星與太陽的連線段在等長的時間內掃過等同的面積。1618年，克卜勒又出版《世界的和諧》並提出週期律：行星繞太陽一周所需的時間 $T$ 和行星軌道的半長軸 $a$ ，滿足 $a^3/T^2$ 為定值，與個別行星無關。

在克卜勒提出三大行星運動定律近70年之後，牛頓於1687年出版《自然哲學的數學原理》，詳細說明了如何以數學論證，從三大行星運動定律得出萬有引力定律。